



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services Branch

395 Wellington Street
Ottawa, Ontario
K1A 0N4

Bibliothèque nationale
du Canada

Direction des acquisitions et
des services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa (Ontario)
K1A 0N4

Vous en avez besoin ?

Vous en avez besoin ?

NOTICE

The quality of this microform is heavily dependent upon the quality of the original thesis submitted for microfilming. Every effort has been made to ensure the highest quality of reproduction possible.

If pages are missing, contact the university which granted the degree.

Some pages may have indistinct print especially if the original pages were typed with a poor typewriter ribbon or if the university sent us an inferior photocopy.

Reproduction in full or in part of this microform is governed by the Canadian Copyright Act, R.S.C. 1970, c. C-30, and subsequent amendments.

AVIS

La qualité de cette microforme dépend grandement de la qualité de la thèse soumise au microfilmage. Nous avons tout fait pour assurer une qualité supérieure de reproduction.

S'il manque des pages, veuillez communiquer avec l'université qui a conféré le grade.

La qualité d'impression de certaines pages peut laisser à désirer, surtout si les pages originales ont été dactylographiées à l'aide d'un ruban usé ou si l'université nous a fait parvenir une photocopie de qualité inférieure.

La reproduction, même partielle, de cette microforme est soumise à la Loi canadienne sur le droit d'auteur, SRC 1970, c. C-30, et ses amendements subséquents.

Canada

**Solitons d'ordre supérieur de l'équation
de Schrödinger non linéaire**

Nathalie Stiévenart

Mémoire

présenté

au

Département de mathématiques et statistiques

comme exigence partielle en vue de l'obtention
du grade Maître ès sciences(M.Sc.)
Université Concordia
Montréal, Québec, Canada

Avril 1993

© Nathalie Stiévenart, 1993



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services Branch

395 Wellington Street
Ottawa, Ontario
K1A 0N4

Bibliothèque nationale
du Canada

Direction des acquisitions et
des services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa (Ontario)
K1A 0N4

0-315-90889-0

0-315-90889-0

The author has granted an irrevocable non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of his/her thesis by any means and in any form or format, making this thesis available to interested persons.

L'auteur a accordé une licence irrévocable et non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de sa thèse de quelque manière et sous quelque forme que ce soit pour mettre des exemplaires de cette thèse à la disposition des personnes intéressées.

The author retains ownership of the copyright in his/her thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without his/her permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège sa thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

ISBN 0-315-90889-0

Canada

Sommaire

Solitons d'ordre supérieur de l'équation de Schrödinger non linéaire

Nathalie Stiévenart

L'équation de Schrödinger non linéaire (cubique) de dimensions $1 + 1$ fait partie des modèles simples, complètement intégrables, construits pour étudier les phénomènes non linéaires. À cette équation est associé un système de Zakharov, Mikhailov et Shabat [3],[4] qui consiste en un problème différentiel linéaire matriciel de premier ordre et méromorphe par rapport à un paramètre complexe.

Les multi-solitons sont des ondes non linéaires stables et localisées, solutions exactes de l'équation de Schrödinger. Ces solitons sont bien connus et peuvent s'obtenir de la *méthode d'habillage* avec un nombre arbitraire de pôles simples, appliquée au système matriciel linéaire de Zakharov-Shabat.

Des matrices d'habillage définies comme des fonctions méromorphes avec un pôle unique d'ordre supérieur donnent lieu à un nouveau type de solitons de l'équation de Schrödinger non linéaire. Ce soliton d'ordre supérieur est une solution exacte. Le calcul détaillé de ce soliton par la méthode d'habillage est présenté ainsi que des graphiques montrant son évolution dans le temps. Ceci est suivi d'une brève analyse comparative mettant en relief quelques différences structurales entre les multi-solitons et les solitons d'ordre supérieur.

Table des matières

<u>Liste des graphiques</u>	p vi
<u>Liste des symboles</u>	p vii
<u>Introduction</u>	p 1
<u>Chapitre premier</u> : Dérivation de l'équation de Schrödinger non linéaire ..	p 3
<u>Chapitre deuxième</u> : Méthode d'habillage : notions préliminaires.....	p 14
2.1 Problème linéaire auxiliaire et équation de courbure nulle.....	p14
2.2 Problème de Riemann.....	p 17
2.3 Méthode d'habillage et solitons.....	p 26
2.4 Réduction du problème linéaire associé.....	p 28
2.5 Résumé du cas multi-solitons.....	p 31
<u>Chapitre troisième</u> : Solitons de deuxième ordre.....	p 41
3.1 Définition des matrices d'habillage	p 41
3.2 Résolution des équations algébriques	p 42
3.3 Résolution des équations d'évolution	p 44
3.4 Formule analytique des solitons d'ordre deux	p 49
3.5 Structure du soliton d'ordre deux et comportement asymptotique..	p 51
<u>Chapitre quatrième</u> : Solitons d'ordre supérieur.....	p 57

4.1 Définition des matrices d'habillage	p 57
4.2 Résolution des équations algébriques	p 58
4.3 Résolution des équations d'évolution	p 61
4.4 Solitons d'ordre supérieur et formule analytique	p 65
<u>Conclusion</u>	p 70
<u>Bibliographie</u>	p 71

Liste des graphiques

Graphique 2.1	Deux solitons	p 38
Graphique 2.2	Trois solitons	p 39
Graphique 2.3	Quatre solitons	p 40
Graphique 3.1	Soliton singulier d'ordre deux	p 55
Graphique 3.2	Soliton de deuxième ordre	p 56
Graphique 4.1	Soliton de troisième ordre	p 68
Graphique 4.2	Soliton de quatrième ordre	p 69

Liste des symboles

Les symboles sont énumérés en ordre alphabétique (latin et grec) avec les numéros de formule où ils sont définis.

a	(4.3.24)	$G(x, t)$	(2.1.8)
$a_{i,j}(\lambda_1)$	(4.2.10)	$G(x, t, \lambda)$	(2.3.7)
A_1	(2.2.2.11)	$G_+(\lambda)$	(2.2.1.1)
A_2	(2.2.2.12)	$G_-(\lambda)$	(2.2.1.1)
$A(x, t)$	(2.4.7)	$\tilde{G}_+(\lambda)$	(2.2.1.2)
$A(\lambda_1)$	(4.2.9)	$\tilde{G}_-(\lambda)$	(2.2.1.2)
A_{eff}	(1.51)	$h(x, t)$	(3.3.16)
$\tilde{A}(z, w - w_0)$	(1.34)	\vec{H}	(1.2)
b	(4.3.24)	\vec{J}_f	(1.2)
$b_{i,j}(\mu_1)$	(4.2.14)	k_0	(1.33)
$B(x, t)$	(2.4.7)	k_i	(2.2.2.31)
$B(\mu_1)$	(4.2.13)	K	(1.55)
\vec{B}	(1.1)	l_i	(2.2.2.32)
c	(2.5.3.18)	M_{0k}	(2.2.2.23)
\vec{c}	(4.4.21)	M_k	(2.2.2.25)
$C(x, t)$	(2.4.7)	\vec{M}	(1.7)
\mathbb{C}^N	(2.2.2.24)	$n(w)$	(1.11)
\vec{D}	(1.2)	n_2	(1.11)
\vec{E}	(1.1)	$\bar{n}(w, \vec{E} ^2)$	(1.11)
$\vec{E}(\vec{r}, t)$	(1.21)	N	(2.5.3.17), (4.4.20)
$\tilde{E}(\vec{r}, w)$	(1.25)	N_{0k}	(2.2.2.23)
$f(\lambda)$	(2.2.1.3)	N_k	(2.2.2.25)
$F(x, y)$	(1.34)	P	(2.2.2.13)
$F(x, t, \lambda)$	(2.1.1)	P_j	(2.2.2.18)
$F_0(x, t, \lambda)$	(2.1.12)	P_0^-	(4.3.22)
$F_+(x, t, \lambda)$	(2.3.9)	P_0^+	(4.3.23)
$F_-(x, t, \lambda)$	(2.3.10)	P_j^-	(4.3.20)
$\tilde{F}(x, t, \lambda)$	(2.1.7)	P_j^+	(4.3.21)
$g(x, t)$	(3.3.16)	$\vec{P}_L(\vec{r}, t)$	(1.22)
G	(3.1.5), (4.1.6)	$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$	(1.23)
$G(\lambda)$	(2.2.1.1)	\vec{P}	(1.6)

$\vec{P}_L(\vec{r}, t)$	(1.14)	\mathbf{Z}^+	(2.2.2.35)
$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t)$	(1.15)	Z_i	(2.5.1.1), (3.1.1), (4.1.1)
Q_i	(2.2.2.31)	\tilde{Z}_i	(2.5.1.3)
R_i	(2.2.2.32)	\mathbf{Z}	(4.2.3a), (3.3.4)
t	(1.55)	\vec{Z}	(4.2.15)
$U(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.1.1)	$\alpha_j(\mathbf{x}, t)$	(2.5.2.11), (3.3.25)
$U_0(\lambda)$	(2.1.10)	α_{j0}	(2.5.2.12)
U_k	(2.2.2.22)	β_0	(1.34)
$U_+(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.3.9)	β_n	(1.45)
$U_-(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.3.10)	$\bar{\beta}$	(1.35)
$\tilde{U}(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.1.8a)	$\gamma_{i(\mathbf{x}, t)}$	(2.5.2.8)
\mathbf{U}	(3.3.5a)	γ_{j0}	(2.5.2.9)
\mathbf{U}_0	(3.3.5a), (4.3.5a)	$\bar{\gamma}$	(2.5.3.14)
v_g	(1.53)	$\bar{\gamma}_{i0}$	(3.3.13)
$V(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.1.1)	$\bar{\gamma}_i(\mathbf{x}, t)$	(3.3.13)
$V_0(\lambda)$	(2.1.10)	Γ	(2.2.2.34a), (3.2.5), (4.2.19)
V_k	(2.2.2.22)	$\Gamma_{i,j}$	(2.5.1.7)
$V_+(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.3.9)	$\bar{\Gamma}$	(4.4.15)
$V_-(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.3.10)	$\bar{\Gamma}_{i,j}$	(4.4.16)
$\tilde{V}(\mathbf{x}, t, \lambda)$	(2.1.8b)	$\tilde{\Gamma}$	(4.2.20)
\mathbf{V}	(3.3.5b)	$\delta_{i(\mathbf{x}, t)}$	(2.5.2.8)
\mathbf{V}_0	(3.3.5b), (4.3.5b)	δ_{j0}	(2.5.2.9)
x	(1.55)	$\bar{\delta}_{i(\mathbf{x}, t)}$	(3.3.13)
x_{\min}	(3.5.8)	$\bar{\delta}_{i0}$	(3.3.13)
$x_{\max 1}$	(3.5.10)	$\vec{\delta}$	(4.4.17)
$x_{\max 2}$	(3.5.11)	Δw	(1.18)
Y	(1.50)	Δn	(1.38)
\mathbf{Y}^+	(2.2.2.35)	$\Delta \beta$	(1.41)
Y_i^+	(2.5.1.2), (3.1.2), (4.1.2)	Δx_{\max}	(3.5.12)
\tilde{Y}_i^+	(2.5.1.4)	Δv	(3.5.13)
\vec{Y}^+	(4.2.7)	ϵ	(2.4.4)

$c(w)$	(1.16), (1.32)	τ	(2.4.3)
ϵ_0	(1.6)	ϕ	(3.5.1)
ν_L	(1.29)	$\phi_i(x, t)$	(2.5.3.6)
ζ	(3.5.2)	$\vec{\phi}$	(4.4.17)
ζ_{\min}	(3.5.8)	$\phi(\mu)$	(2.2.1.5)
$\zeta_{\max 1}$	(3.5.10)	$\Phi(s)$	(2.2.1.8)
$\zeta_{\max 2}$	(3.5.11)	$\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$	(1.10)
η	(3.3.21), (4.2.16)	$\chi(\lambda)$	(2.2.2.28)
η^+	(2.2.2.35)	$\chi^{-1}(\lambda)$	(2.2.2.29)
η_0	(3.3.24), (4.3.16b)	$\chi^{-1}(x, t, \lambda)$	(2.3.14), (3.1.2)
η_i	(2.5.1.2), (3.1.2), (4.1.2)	$\chi(x, t, \lambda)$	(2.3.14), (3.1.1)
η_{i0}	(3.3.24)	$\hat{\chi}^{-1}(\lambda_1)$	(4.2.3c)
$\tilde{\eta}_i$	(2.5.1.4)	$\psi(x, t)$	(1.56)
$\vec{\eta}$	(4.2.15)	ω_0	(1.18)
λ_i	(2.2.2.1), (2.5.1.1), (3.1.1), (4.1.1)	$\tilde{\omega}$	(1.52)
λ_0	(2.2.2.12)	$\Omega + (s), \Omega - (s)$	(2.2.1.10)
Λ	(3.1.4), (4.1.4)		
μ_0	(1.7), (2.2.2.11)		
μ_i	(2.2.2.1), (2.5.1.2), (3.1.2), (4.1.2)		
ξ^+	(2.2.2.35), (3.3.4), (4.2.3b)		
ξ_0	(3.3.12)		
ξ_i^+	(2.5.1.1), (3.1.1), (4.1.1)		
$\tilde{\xi}_i$	(2.5.1.3)		
$\tilde{\xi}$	(3.3.7)		
$\vec{\xi}^+$	(4.2.11)		
$\hat{\xi}^+$	(4.2.12)		
$\hat{\xi}_0$	(4.3.16a)		
ρ_f	(1.3)		
$\rho_i(x, t)$	(2.5.3.6)		
$\bar{\rho}$	(2.5.3.14)		
σ_3	(2.1.5)		

Introduction

Faddeev et Takhtajan [2] décrivent le soliton comme suit: c'est une solution localisée d'une équation non linéaire qui modélise des excitations d'énergies finies et qui se propage sans déformer son profil. De plus, un soliton possède la propriété de diffusion des particules élastiques voulant que l'interaction entre plusieurs ondes solitaires ne modifie ni leur nombre, ni leur forme.

Une solution de type soliton a été découverte par Boussinesq (1872) pour des ondes longues à la surface d'un liquide. En 1895, Korteweg et de Vries, après avoir observé des ondes longues dans un canal rectangulaire, parlent d'un "nouveau type d'ondes" et dérivent leur célèbre équation. C'est à Laurent'ev et à Fridrikhs qu'on doit la preuve théorique de l'existence de solitons à la surface d'un liquide de profondeur finie [7]. Un demi-siècle après la publication de l'équation de Korteweg-de Vries, l'étude du comportement des gaz plasmas dans les champs électromagnétiques fait réapparaître une équation non linéaire du même type. L'approche analytique étant complexe, c'est le développement d'ordinateurs à haute vitesse (après 1950) qui permet l'investigation d'équations non linéaires. Ainsi, en 1965, Zabusky et Kruskal observent numériquement des ondes ayant la propriété de collisions élastiques dans l'équation de Korteweg- de Vries.

La méthode de diffusion inverse étendue à plusieurs équations non linéaires donne finalement naissance à la théorie des solitons (1967) [8]. Pour les équations à dérivées partielles non linéaires, cette méthode est équivalente à celle de la transformée de Fourier appliquée aux équations à dérivées partielles linéaires. La méthode de diffusion inverse classique consiste à construire des solutions à partir de leur comportement asymptotique. Le calcul présenté ici n'utilise pas l'approche classique. Il se base sur la reformulation du problème de diffusion inverse par le biais du problème de Riemann. Cette technique fournit un algorithme pour

déterminer et solutionner exactement certains systèmes localement intégrables.

L'équation de Schrödinger non linéaire décrit les processus ondulatoires non linéaires présents en optique et en théorie des plasmas. Cette équation universelle est dérivée dans le contexte des fibres optiques au premier chapitre de ce travail. Le second chapitre détaille la méthode d'habillage utilisée pour résoudre l'équation non linéaire et rappelle le calcul des solutions exactes connues sous le nom de multi-solitons. Finalement, les troisième et quatrième chapitres appliquent la même méthode pour obtenir un nouveau type de soliton baptisé soliton "d'ordre supérieur".

Chapitre premier

Dérivation de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique.

L'équation de Schrödinger non linéaire modélise mathématiquement plusieurs phénomènes physiques dont la propagation unimodale dans des fibres optiques dispersives, non linéaires et sans perte. La dérivation suivante [5] démontre comment, à partir des hypothèses et des restrictions imposées par la physique de l'optique guidée unimodale, il est possible d'obtenir une équation de propagation de base pour des impulsions courtes dans de telles fibres.

Tout phénomène électromagnétique est caractérisé par les équations de Maxwell. En système (mks), ces équations s'écrivent:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

\vec{E} et \vec{H} sont les vecteurs de champs électrique et magnétique, \vec{D} et \vec{B} sont les densités de flux électrique et magnétique correspondantes tandis que \vec{J}_f et ρ_f sont les densités de courant et de charges présentes dans le milieu. Les fibres optiques sont généralement faites de dioxyde de silicium (SiO_2) vitrifié et dopé. Dans ce matériau, les charges libres sont inexistantes. Alors,

$$\rho_f = 0 \text{ et } \vec{J}_f = \vec{0} \quad (1.5)$$

Les relations constitutives entre les champs \vec{E} et \vec{H} qui se propagent et les densités de flux correspondantes \vec{D} et \vec{B} qui sont les réponses du milieu peuvent s'écrire:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.6)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (1.7)$$

où ϵ_0 et μ_0 sont la permittivité et la perméabilité du vide tandis que \vec{P} et \vec{M} sont les polarisations électrique et magnétique induites dans le diélectrique. Le dioxyde de silicium étant non magnétique,

$$\vec{M} = \vec{0} \quad (1.8)$$

L'équation d'onde décrivant la propagation de la lumière en fonction du champ électrique \vec{E} et de la polarisation électrique induite \vec{P} dans les fibres optiques est déduite en prenant le rotationnel de (1.1) et en utilisant (1.2), (1.6) et (1.7):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ définit la vitesse de la lumière dans le vide. La détermination d'une relation entre \vec{P} et \vec{E} est nécessaire pour compléter la description. En général, l'évaluation de \vec{P} requiert une approche de mécanique quantique. Toutefois, pour le cas de l'étude des phénomènes non linéaires dans les fibres optiques, les longueurs d'ondes considérées sont dans le domaine $0.5 - 2 \mu m$. A ces longueurs d'ondes correspondent des fréquences optiques loin des fréquences de résonance du SiO_2 . Il est alors suffisant d'utiliser la relation

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots) \quad (1.10)$$

qui décrit la réponse non linéaire de tout diélectrique à des champs électromagnétiques intenses.

$\chi^{(1)}$ est la contribution dominante de \vec{P} ; ses effets sont inclus à travers le coefficient de réfraction n et le facteur d'atténuation de puissance qui est considéré négligeable dans la présente dérivation.

$\chi^{(2)}$ est responsable des effets non linéaires tels que la génération de seconde harmonique ou de "sommes de fréquences"; $\chi^{(2)}$ est nul pour les molécules possédant une symétrie d'inversion telles que SiO_2 .

$\chi^{(3)}$ est responsable de la troisième génération d'harmoniques, "du mélange de 4 ondes" (4 waves mixing) et de la réfraction non linéaire; le dernier phénomène entraîne la dépendance de l'indice de réfraction sur l'intensité du champ électrique dans la fibre optique provenant de la contribution de $\chi^{(3)}$:

$$\bar{n}(\omega, |\vec{E}|^2) = n(\omega) + n_2 |\vec{E}|^2 \quad (1.11)$$

$$\text{avec } n_2 \equiv \frac{3}{8n(\omega)} \chi_{xxxx}^{(3)} \quad (1.12)$$

où il est assumé que le champ électrique est polarisé linéairement dans la fibre. (Ceci explique que seule une composante du tenseur d'ordre 4: $\chi^{(3)}$ contribue à l'indice de réfraction).

Considérant que les effets non linéaires d'ordre supérieur à trois sont négligeables pour les fibres optiques, la polarisation électrique induite consiste en deux parties:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_L(\vec{r}, t) + \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) \quad (1.13)$$

$$\text{où } \vec{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') \cdot \vec{E}(\vec{r}, t') dt', \quad (1.14)$$

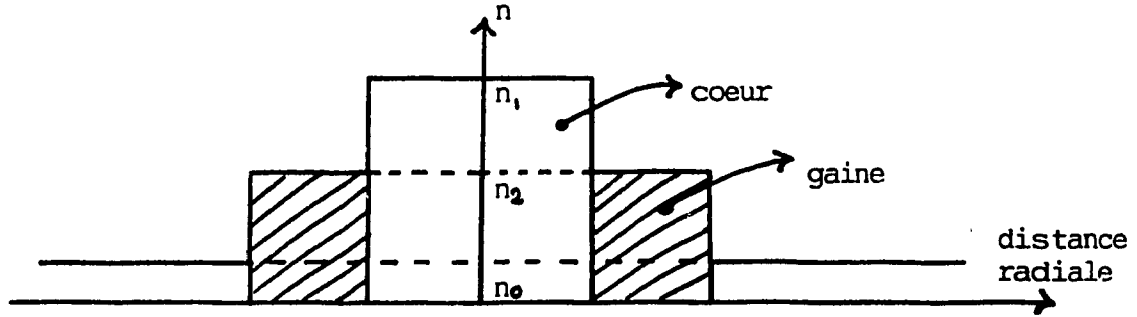
$$\begin{aligned} \vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \cdot \\ &\vec{E}(\vec{r}, t_1) \vec{E}(\vec{r}, t_2) \vec{E}(\vec{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Les relations (1.14) et (1.15) sont valables dans l'approximation du dipôle électrique où la réponse du milieu est locale.

Les équations (1.9), (1.13), (1.14) et (1.15) procurent un formalisme général pour le traitement des effets non linéaires de bas ordres dans les fibres optiques. En

raison de leur complexité, il est nécessaire de considérer les hypothèses simplificatrices suivantes pour déduire une équation gouvernant la propagation d'impulsions courtes dans des fibres non linéaires, dispersives et sans perte:

1) Considérant une fibre cylindrique à saut d'indices, l'indice de réfraction a généralement le profil suivant:



Or, pour les diélectriques non dissipatifs, la constante diélectrique est reliée à l'indice de réfraction par la relation

$$\epsilon(\omega) = n^2(\omega) \quad (1.16)$$

où ω est la fréquence du champ électrique dans la fibre. A l'intérieur du coeur, de même qu'à l'intérieur de la gaine, le gradient de l'indice de réfraction est nul. Dans chacune des régions (coeur ou gaine), l'équation de Maxwell (1.3) devient

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 &\iff \vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = 0 \\ &\iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

2) Dans les fibres optiques, puisque $|\vec{P}_{NL}| \ll |\vec{P}_L|$, \vec{P}_{NL} est traitée comme une petite perturbation de \vec{P}_L .

3) Le champ optique est assumé de même polarisation tout au long de la fibre de telle sorte qu'une approche scalaire est valable.

4) Le champ optique est assumé quasi monochromatique, et son spectre, centré à ω_0 , possède une largeur spectrale $\Delta\omega$ telle que

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (1.18)$$

5) L'enveloppe de l'impulsion est assumée à variation lente: la fréquence associée au profil de l'enveloppe est négligeable par rapport à la fréquence centrale de l'impulsion.

Dérivation de l'équation de propagation conformément aux hypothèses 1) à 5):

$$\text{Soit l'identité } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (1.19)$$

L'hypothèse 1) ainsi que la définition (1.13) substituée dans l'équation (1.9) entraînent:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

où \vec{P}_L et \vec{P}_{NL} sont les polarisations électriques induites reliées au champ électrique par les relations (1.14) et (1.15). Dans l'approximation de lente variation de l'enveloppe, il est nécessaire de séparer la partie à variation rapide du champ électrique en écrivant:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{E}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.21)$$

où \hat{x} est le vecteur unitaire de polarisation de la lumière et où $\bar{E}(\vec{r}, t)$ est une fonction à variation lente dans le temps (comparativement à la période optique).

De même, les composantes de polarisation \vec{P}_L et \vec{P}_{NL} peuvent s'écrire:

$$\vec{P}_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{P}_L(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.22)$$

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{P}_{NL}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + c.c.] \quad (1.23)$$

En substituant (1.21) et (1.22) dans (1.14), la composante linéaire de la polarisation est déduite:

$$\overline{P}_L(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t-t') \overline{E}(\vec{r}, t') e^{i\omega_0(t-t')} dt' \quad (1.24)$$

Soit la transformée de Fourier de $\overline{E}(\vec{r}, t)$:

$$\tilde{\overline{E}}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{E}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.25)$$

(1.24) peut se réécrire:

$$\overline{P}_L(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{\overline{E}}(\vec{r}, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega \quad (1.26)$$

où $\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $\chi_{xx}^{(1)}(\tau)$ définie similairement à (1.25).

Pour les fibres optiques, il est tout à fait justifiable de considérer que la réponse non linéaire de la polarisation est instantanée. La dépendance temporelle de $\chi^{(3)}$ dans (1.15) peut donc être approximée par trois fonctions delta $\delta(t - t_i)$. La relation (1.15) devient

$$\vec{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.27)$$

Lorsque (1.23) et (1.21) sont substituées dans (1.27), $\overline{P}_{NL}(\vec{r}, t)$ se trouve à avoir un terme oscillant à ω_0 et un autre à $3\omega_0$. Le dernier terme est négligeable pour les fibres optiques, ce qui entraîne:

$$\overline{P}_{NL}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{NL} \overline{E}(\vec{r}, t) \quad (1.28)$$

où ϵ_{NL} est la contribution non linéaire de la constante diélectrique:

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |\overline{E}(\vec{r}, t)|^2 \quad (1.29)$$

Afin d'obtenir l'équation d'onde de l'amplitude à variation lente $\overline{E}(\vec{r}, t)$, il est plus pratique de travailler dans le domaine de Fourier. Ceci est généralement

impossible puisque l'équation (1.20) est non linéaire avec la dépendance de ϵ_{NL} sur l'intensité.

Toutefois, pour permettre une approche par transformée de Fourier, ϵ_{NL} sera considéré constant. Ceci est justifiable car \overline{P}_{NL} est une petite perturbation et l'enveloppe varie lentement. L'équation (1.20) dans laquelle sont substituées les définitions (1.21), (1.22), (1.23) ainsi que les relations (1.26) et (1.28) entraîne l'équation:

$$\nabla^2 \tilde{\overline{E}}(\vec{r}, \omega - \omega_0) + \epsilon(\omega) k_0^2 \tilde{\overline{E}}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = 0 \quad (1.30)$$

où $\tilde{\overline{E}}(\vec{r}, \omega - \omega_0)$ est la transformée de Fourier de $\overline{E}(\vec{r}, t)$ définie par

$$\tilde{\overline{E}}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{E}(\vec{r}, t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt \quad (1.31)$$

avec

$$\epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \epsilon_{NL} \quad (1.32)$$

et

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (1.33)$$

L'équation (1.30) peut être résolue en utilisant la méthode de séparation des variables. Soit une solution de la forme:

$$\tilde{\overline{E}}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} \quad (1.34)$$

où $F(x, y)$ est la distribution transversale du champ électrique, $\tilde{A}(z, \omega)$ est une fonction variant lentement avec z et β_0 est le nombre d'onde correspondant à la fréquence centrale ω_0 . La relation (1.34) substituée dans (1.30) permet de dériver les équations suivantes pour $F(x, y)$ et $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\epsilon(\omega) k_0^2 - \bar{\beta}^2] F = 0 \quad (1.35)$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\bar{\beta}^2 - \beta_0^2) \tilde{A} = 0 \quad (1.36)$$

(Pour obtenir l'équation (1.36), la deuxième dérivée $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}$ a été négligée conformément à l'hypothèse 5 de variation lente). Le nombre d'onde $\bar{\beta}$ peut être déterminé en solutionnant l'équation aux valeurs propres (1.35) pour les modes de la fibre avec les conditions aux frontières appropriées sur les composantes tangentielles de \vec{E} et \vec{H} à l'interface cœur/gaine (voir [5] pour plus de détails).

La constante diélectrique peut être approximée par:

$$\epsilon(\omega) = (n(\omega) + \Delta n)^2 \cong n^2(\omega) + 2n(\omega) \Delta n \quad (1.37)$$

où Δn est une petite perturbation:

$$\Delta n = n_2 |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \quad (1.38)$$

L'équation (1.35) peut être résolue en utilisant une théorie de perturbation de premier ordre. Ceci consiste à résoudre (1.35) en remplaçant ϵ par n^2 pour obtenir la distribution modale $F(x, y)$ ainsi que le nombre d'onde correspondant $\beta(\omega)$. Pour une fibre unimodale, cylindrique, à saut d'indices, $F(x, y)$ correspond à la distribution modale du mode fondamental HE_{11} approximé par la gaussienne:

$$F(x, y) = \exp \left[\frac{-(x^2 + y^2)}{\tilde{\omega}^2} \right] \quad (1.39)$$

où $\tilde{\omega}$ est un "paramètre de largeur" (voir [5] pour plus de détails)

Dans une théorie de perturbation de premier ordre, Δn n'affecte pas la distribution modale $F(x, y)$. Par contre, la valeur propre $\bar{\beta}$ est donnée par:

$$\bar{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta \quad (1.40)$$

où

$$\Delta\beta = \frac{\omega_0 \int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n |F(x, y)|^2 dx dy}{c [\int \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy]^2} \quad (1.41)$$

La solution formelle de l'équation (1.20) à l'ordre le plus bas de la perturbation \vec{P}_{NL} est donc de la forme:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x} \frac{1}{2} \{ F(x, y) A(z, t) \exp [i(\beta_0 z - \omega_0 t)] + c.c. \} \quad (1.42)$$

où $F(x, y)$ est donnée par (1.39) et où la transformée de Fourier $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$ de l'amplitude à variation lente satisfait (1.36). L'équation (1.36) peut se réécrire:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z}(z, \omega - \omega_0) = i(\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \quad (1.43)$$

(où la relation (1.40) a été utilisée ainsi que l'approximation $\bar{\beta}^2 - \beta_0^2 \cong 2\beta_0(\bar{\beta} - \beta_0)$). La transformée de Fourier inverse de (1.43) donne l'équation de propagation de $A(z, t)$. Soit le développement de $\beta(\omega)$ en série de Taylor autour de ω_0 :

$$\beta(\omega) = \beta_0 + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + \dots \quad (1.44)$$

où

$$\beta_n = \left(\frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (1.45)$$

Les termes cubiques et supérieurs sont généralement négligeables conformément à l'hypothèse de quasi mono-chromaticité utilisée lors de la dérivation de (1.43). Ceci limite la validité de cette équation aux impulsions de largeur ≥ 0.1 ps.

La série (1.44) est substituée dans l'équation (1.43) et la transformée inverse de Fourier est prise en utilisant:

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp [-i(\omega - \omega_0)t] d\omega \quad (1.46)$$

(durant l'opération, $\omega - \omega_0$ est remplacé par l'opérateur différentiel $i\frac{\partial}{\partial t}$). Il en résulte l'équation:

$$\frac{\partial A}{\partial z}(z, t) = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t}(z, t) - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(z, t) + i \Delta \beta A(z, t) \quad (1.47)$$

où le terme $\Delta\beta$ inclut les effets non linéaires de la fibre. En substituant (1.38) dans (1.41), $\Delta\beta$ peut s'écrire:

$$\Delta\beta = \frac{\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_2 |F(x, y)|^4 |A(z, t)|^2 dx dy}{c [\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy]^2} \quad (1.48)$$

Avec ceci, l'équation (1.47) devient

$$\frac{\partial A}{\partial z}(z, t) = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t}(z, t) - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}(z, t) + iY |A(z, t)|^2 A(z, t) \quad (1.49)$$

où Y est le coefficient non linéaire:

$$Y = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}} \quad (1.50)$$

A_{eff} est la "région efficace" du coeur

$$A_{\text{eff}} = \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^4 dx dy} \quad (1.51)$$

Si le mode fondamental est approximé par (1.39)

$$A_{\text{eff}} = \pi \tilde{\omega}^2 \quad (1.52)$$

où $\tilde{\omega}$ dépend des paramètres de la fibre. L'équation (1.49) décrit la propagation d'une impulsion optique dans une fibre unimodale où β_2 est le facteur de dispersion et où Y est le facteur de non linéarité. Dans le régime de dispersion anormal (lorsque les hautes fréquences voyagent plus vite que les basses fréquences: $\beta_2 < 0$), il y a équilibre entre la dispersion et l'effet non linéaire et la fibre peut supporter des solitons optiques. Dans le système de référence de l'impulsion dont la vitesse de groupe est

$$v_g = \frac{1}{\beta_1}, \quad (1.53)$$

l'équation de propagation devient:

$$\frac{\partial A}{\partial z}(z, T) + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2}(z, T) = iY |A(z, T)|^2 A(z, T) \quad (1.54)$$

(après avoir effectué le changement de variables: $T = t - \beta_1 z$)

L'équation (1.54) est l'équation de Schrödinger non linéaire étudiée dans le contexte des solitons. Elle est valable pour des impulsions de largeur $T_0 \gg 100 fs$ avec $\omega_0 T_0 \gg 1$.

Les prochains chapitres traitent de la résolution de l'équation (1.54) par la méthode d'habillage. Les conventions définies ci-dessous sont utilisées par [2].

$$\begin{aligned} z &\rightarrow t, & T &\rightarrow x, & A &\rightarrow \psi, \\ \beta_2 &\rightarrow -2 \text{ et } Y &\rightarrow -2K \end{aligned} \tag{1.55}$$

L'équation de Schrödinger non linéaire sera donc étudiée sous la forme

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) = 2K |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) \tag{1.56}$$

Une solution de type soliton survient lorsque la dispersion est exactement contrebalancée par l'effet non linéaire qui introduit un décalage en fréquence en chaque point de l'onde. La non-linéarité crée donc une auto-modulation de phase qui ne change pas le profil d'intensité et qui s'oppose à la dispersion anormale ($\beta_2 < 0$).

Le chapitre suivant détaille la méthode utilisée pour calculer de tels solitons.

Chapitre deuxième

Méthode d’habillage: notions préliminaires. (références: [1], [2], [3], [4])

La méthode d’habillage a comme point de départ le fait capital suivant: certaines équations différentielles non linéaires sont équivalentes à des systèmes matriciels différentiels linéaires surdéterminés. La méthode d’habillage [3] est un algorithme permettant de construire des solutions à ces systèmes linéaires à partir de solutions déjà connues de ces mêmes systèmes. Typiquement, des solutions “triviales” (des matrices nulles ou constantes) constituent le point de départ.

2.1 Problème linéaire auxiliaire et équation de courbure nulle.

Soit le système différentiel linéaire suivant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, t, \lambda) &= U(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, t, \lambda) &= V(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda)\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

où U, V et F sont des matrices carrées d’ordre quelconque N , U et V sont des polynômes ou des fonctions rationnelles d’un paramètre complexe λ avec pôles fixes et F est assumée non singulière. Ceci définit la forme générale d’un “système de Zakharov-Shabat”. La condition de compatibilité de ce système surdéterminé est l’équation à courbure nulle de Zakharov-Shabat:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \iff U_t - V_x + [U, V] = 0\tag{2.1.2}$$

Cette dernière équation est vue comme un système d’équations aux dérivées partielles satisfait identiquement en λ .

Pour le cas $N = 2$, il est possible de relier le système surdéterminé (2.1.1) avec l'équation de Schrödinger non linéaire en imposant:

$$U(x, t, \lambda) = \sqrt{K} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2i} \sigma_3, \quad (2.1.3)$$

$$V(x, t, \lambda) = i\sqrt{K} \begin{pmatrix} \sqrt{K}|\psi|^2 & -\bar{\psi}_x \\ \psi_x & -\sqrt{K}|\psi|^2 \end{pmatrix} - \lambda\sqrt{K} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\lambda^2}{2} \sigma_3 \quad (2.1.4)$$

$$\text{où } \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

Lorsque ces définitions sont substituées dans l'équation de courbure nulle (2.1.2), elles entraînent directement l'équation

$$i\psi_t + \psi_{xx} = 2K|\psi|^2\psi \quad (2.1.6)$$

Il faut remarquer que les formes de U et V définies par (2.1.3) et (2.1.4) peuvent être déduites du cas général $N = 2$ en imposant des conditions d'involution sur le système (2.1.1). Ceci sera démontré à la section 2.3.

Le problème linéaire auxiliaire (2.1.1) avec une dépendance sur λ donnée, ne possède une solution unique (U, V, F) qu'à une transformation de jauge près. En effet, la transformation $\tilde{F} = GF$, où $G = G(x, t)$ est une matrice non singulière, permet d'obtenir, par substitution dans le système (2.1.1), un nouveau système linéaire défini par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x, t, \lambda) &= \tilde{U}(x, t, \lambda) \tilde{F}(x, t, \lambda) \\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(x, t, \lambda) &= \tilde{V}(x, t, \lambda) \tilde{F}(x, t, \lambda) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

où

$$\tilde{U} \equiv GUG^{-1} + G_x G^{-1} \quad (2.1.8a)$$

$$\tilde{V} \equiv GVG^{-1} + G_t G^{-1} \quad (2.1.8b)$$

Cette transformation ne change pas la structure méromorphe de U et V en λ . La condition de compatibilité est invariante sous cette transformation de jauge puisque

$$\tilde{U}_t - \tilde{V}_x + [\tilde{U}, \tilde{V}] = 0 \iff U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (2.1.9)$$

En général, lorsque la transformation de jauge dépend de λ , la structure polynomiale de U et V n'est pas conservée. Or, il est possible de déterminer des transformations de jauge, fonctions de λ , telles que les structures méromorphes de U et V en λ demeurent inchangées. (Remarque: lorsque le système (2.1.1) considéré n'est pas général mais soumis aux conditions d'invariance donnant lieu aux formes réduites (2.1.3) et (2.1.4), il faut également restreindre la classe des transformations de jauge $G(x, t, \lambda)$ à celle qui conserve ces conditions de réduction.) Toutes les solutions (U, V, F) reliées par de telles transformations vérifient la même équation de courbure nulle. Ceci mène à la méthode d'habillage (référence: [3])

Cette méthode consiste à "habiller" une solution triviale connue du problème (2.1.1) par une transformation qui dépend de λ mais qui conserve la structure de U et V . Les solutions non triviales dérivées par ce procédé produisent également des solutions à l'équation (2.1.2).

Soit une solution triviale (U_0, V_0, F_0) du problème (2.1.1) dans le cas où les matrices U et V sont données par (2.1.3) et (2.1.4). U_0 et V_0 sont des matrices constantes dans l'espace et dans le temps:

$$U_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2i}\sigma_3, \quad V_0(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 \quad (2.1.10)$$

et σ_3 est définie par (2.1.5).

Cette solution correspond au cas $\psi(x, t) = 0$. La condition de compatibilité est évidemment vérifiée puisque

$$[U_0(\lambda), V_0(\lambda)] = 0 \quad (2.1.11)$$

Les équations (2.1.1) pour ce cas trivial donnent la solution

$$F_0(x, t, \lambda) = \exp (U_0(\lambda)x + V_0(\lambda)t) \quad (2.1.12)$$

qui est unique à une multiplication à droite près par une matrice constante. Il s'agit maintenant de définir une transformation de jauge, fonction de λ , préservant l'équation de courbure nulle (2.1.2).

La prochaine section explique comment atteindre cet objectif à partir du formalisme d'un problème de factorisation matricielle analytique appelé problème de Riemann.

2.2 Problème de Riemann.

A première vue, les deux parties de cette section n'ont aucun lien avec la résolution d'une équation non linéaire aux dérivées partielles. Ces sections, qui traitent du problème de Riemann en général, trouvent leur justification dans le rôle crucial joué par ce problème dans la méthode d'habillage.

2.2.1 Problème de Riemann matriciel régulier.

Ce problème s'énonce comme suit: soit $G(\lambda)$ une fonction matricielle d'ordre N , non dégénérée, définie sur une courbe lisse fermée γ de la sphère de Riemann d'un paramètre complexe λ . Il s'agit de construire deux fonctions matricielles non dégénérées $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$, respectivement analytiques à l'intérieur et à l'extérieur de la courbe, de sorte que sur γ la condition

$$G_+(\lambda)G_-(\lambda) = G(\lambda) \quad (2.2.1.1)$$

soit respectée. La solution, donnée par la paire de fonctions matricielles $G_+(\lambda), G_-(\lambda)$ n'est pas unique; la paire $G_+(\lambda)g$ et $g^{-1}G_-(\lambda)$ est également une solution, pour

toute fonction matricielle non dégénérée g , indépendante de λ . Pour rendre le problème de Riemann régulier unique, il faut fixer la valeur d'une des deux matrices recherchées en un point de son domaine d'analyticité. Dans la plupart des cas, la condition de normalisation "canonique" est utilisée: elle consiste à imposer la valeur unité à $\lambda = \infty$. La solution d'un problème de Riemann régulier normalisé est donc unique puisque toutes paires $G_+(\lambda), G_-(\lambda)$ et $\tilde{G}_+(\lambda), \tilde{G}_-(\lambda)$, reliées par la condition

$$G_+(\lambda)G_-(\lambda) = \tilde{G}_+(\lambda)\tilde{G}_-(\lambda) = G(\lambda) \quad (2.2.1.2)$$

sur la courbe γ , permettent de définir une fonction $f(\lambda)$ pouvant être prolongée analytiquement de γ à tout le plan complexe:

$$f(\lambda) = \tilde{G}_+(\lambda)^{-1}G_+(\lambda) \equiv \tilde{G}_-(\lambda)G_-(\lambda)^{-1} \quad (2.2.1.3)$$

Par le théorème de Liouville, une telle fonction est constante et après normalisation:

$$f(\lambda) = 1 \quad (2.2.1.4)$$

Par le théorème de Wiener, la résolution d'un problème de Riemann régulier est équivalente à celle d'un système d'équations intégrales singulières définies sur le contour γ . En effet, $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$ sont des matrices non dégénérées dans leur domaine d'analyticité respectif. Par le théorème de Wiener, elles peuvent alors s'écrire:

$$G_+^{-1}(\lambda) = 1 + \oint_{\gamma} \frac{\phi(\mu)d\mu}{\mu - \lambda} \quad (2.2.1.5)$$

pour λ à l'intérieur du contour et

$$G_-(\lambda) = 1 + \oint_{\gamma} \frac{\phi(\mu)d\mu}{\mu - \lambda} \quad (2.2.1.6)$$

pour λ à l'extérieur du contour. Ces matrices vérifient la normalisation canonique:

$$G_+(\infty) = G_-(\infty) = 1 \quad (2.2.1.7)$$

Soit γ choisi comme étant l'axe réel.

Soit les transformées de Fourier suivantes:

$$G(\lambda) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s)e^{i\lambda s} ds \quad (2.2.1.8)$$

$$\phi(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{\infty} \Omega_+(s)e^{i\mu s} ds + \int_{-\infty}^0 \Omega_-(s)e^{i\mu s} ds \right) \quad (2.2.1.9)$$

Avec le théorème des résidus, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\mu)d\mu}{\mu - \lambda} \equiv \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{\infty} \Omega_+(s)ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu + \int_{-\infty}^0 \Omega_-(s)ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu \right) \quad (2.2.1.10)$$

se réduit aux égalités:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\mu)d\mu}{\mu - \lambda} = \int_0^{\infty} \Omega_+(s)e^{i\lambda s} ds, \quad (2.2.1.11)$$

pour λ dans le demi-plan complexe supérieur et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\mu)d\mu}{\mu - \lambda} = - \int_{-\infty}^0 \Omega_-(s)e^{i\lambda s} ds = - \int_0^{\infty} \Omega_-(-s)e^{-i\lambda s} ds, \quad (2.2.1.12)$$

pour λ dans le demi-plan complexe inférieur. Sur l'axe réel, la condition:

$$G_+^{-1}(\lambda)G(\lambda) = G_-(\lambda) \quad (2.2.1.13)$$

amène l'équation intégrale suivante:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s)e^{i\lambda s} ds + \int_0^{\infty} \Omega_+(s)e^{i\lambda s} ds \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)e^{i\lambda t} dt + \\ & \int_0^{\infty} \Omega_+(s)e^{i\lambda s} ds + \int_0^{\infty} \Omega_-(-s)e^{-i\lambda s} ds = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1.14)$$

La transformée de Fourier inverse de l'équation (2.2.1.14) s'obtient de la multiplication par le facteur $\frac{1}{2\pi}e^{-i\lambda x}$, $x \geq 0$, suivi d'une intégration sur λ . De ceci, résulte

$$\Phi(x) + \int_0^{\infty} \Omega_+(s)\Phi(x-s)ds + \Omega_+(x) = 0 \quad (2.2.1.15)$$

qui est l'équation intégrale de Wiener-Hopf pour la fonction Ω_+ . Lorsqu'elle existe, la solution de cette équation résout le problème de Riemann régulier normalisé. L'existence d'une telle solution sera désormais supposée pour tout ce qui suit.

2.2.2 Problème de Riemann singulier et exemples.

On parle de problème de Riemann singulier lorsque les fonctions matricielles d'ordre N $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$, définies à la section précédente, possèdent un ou plusieurs zéros dans leur domaine d'analyticité. Une fonction matricielle est dite avoir un zéro à $\lambda = \lambda_0$ si son déterminant s'annule à ce point; de plus, la fonction inverse possède un pôle à $\lambda = \lambda_0$.

Exemple 1: Soit $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$ des fonctions scalaires analytiques ayant chacune n zéros simples respectivement à l'intérieur $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et à l'extérieur $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ du contour γ . Soit les fonctions auxiliaires

$$\tilde{G}_+(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda - \mu_i}{\lambda - \lambda_i} G_+(\lambda) \quad (2.2.2.1)$$

et

$$\tilde{G}_-(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda - \mu_i} G_-(\lambda) \quad (2.2.2.2)$$

respectivement analytiques à l'intérieur et à l'extérieur de γ mais sans zéro. La condition de normalisation canonique:

$$G_-(\infty) = 1 \quad (2.2.2.3)$$

entraîne

$$\tilde{G}_-(\infty) = 1. \quad (2.2.2.4)$$

De même, sur la courbe γ , la condition

$$G_+(\lambda)G_-(\lambda) = G(\lambda) \quad (2.2.2.5)$$

a pour conséquence

$$\tilde{G}_+(\lambda)\tilde{G}_-(\lambda) = G(\lambda) \quad (2.2.2.6)$$

La détermination de $\tilde{G}_+(\lambda)$ et de $\tilde{G}_-(\lambda)$ est donc un problème de Riemann régulier normalisé et se résoud tel qu'indiqué à la section précédente. Cet exemple démontre que le problème de Riemann singulier normalisé n'est pas unique lorsque la position des zéros n'est pas spécifiée. De plus, pour obtenir une solution unique, les nombres de zéros, définis respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du contour γ , doivent être égaux.

Contrairement au problème de Riemann régulier, le problème de Riemann singulier est significatif même pour le cas trivial où

$$G(\lambda) = 1 \quad (2.2.2.7)$$

Cette condition triviale appliquée au cas scalaire de l'exemple 1 admet des solutions $G_+(\lambda), G_-(\lambda)$ qui s'étalent comme fonctions méromorphes dans le plan complexe entier et qui satisfont à la relation

$$G_-(\lambda) = \frac{1}{G_+(\lambda)} \quad (2.2.2.8)$$

Les zéros de $G_-(\lambda)$ sont les pôles de $G_+(\lambda)$ et vice versa. La résolution consiste donc à construire une fonction scalaire analytique et méromorphe à partir de ses pôles et zéros puis à résoudre le problème de Riemann régulier donné par la relation (2.2.2.6).

Pour le cas matriciel trivial ($G(\lambda) = 1$), la construction d'une fonction analytique à partir de ses zéros et pôles se complique:

Exemple 2: Soit les fonctions matricielles $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$, ayant chacune un zéro unique simple respectivement à λ_1 et μ_1 , vérifiant les contraintes:

$$G_+(\lambda)G_-(\lambda) = 1 \quad (2.2.2.9)$$

et

$$G_-(\infty) = G_+(\infty) = 1. \quad (2.2.2.10)$$

Il s'agit de trouver les formes générales des matrices d'ordre N , $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$, en posant

$$G_+(\lambda) = 1 + \frac{A_1}{\lambda - \mu_0} \quad (2.2.2.11)$$

et

$$G_-(\lambda) = 1 + \frac{A_2}{\lambda - \lambda_0} \quad (2.2.2.12)$$

où les matrices A_1 et A_2 sont à déterminer. La condition (2.2.2.9) entraîne les relations

$$A_1 = -(\lambda_0 - \mu_0)P \text{ et } A_2 = (\lambda_0 - \mu_0)P \quad (2.2.2.13)$$

avec P un opérateur de projection arbitraire ($P^2 = P$). Les matrices recherchées ont alors les structures suivantes:

$$G_+(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda_0 - \mu_0)}{\lambda - \mu_0}P \quad (2.2.2.14)$$

et

$$G_-(\lambda) = 1 + \frac{\lambda_0 - \mu_0}{\lambda - \lambda_0}P \quad (2.2.2.15)$$

L'opérateur $G_+(\lambda_0) = G_-(\mu_0) = 1 - P$ est également un opérateur de projection. Les opérateurs de projection sont complètement déterminés par leur noyau et par leur image. L'opérateur P peut donc être uniquement construit à partir des sous-espaces

$$\text{Im}(G_+(\lambda_0)) = \text{Ker}(P) \quad (2.2.2.16)$$

et

$$\text{Ker}(G_+(\lambda_0)) = \text{Im}(P). \quad (2.2.2.17)$$

Exemple 3: Soit le cas matriciel trivial ($G(\lambda) = 1$) où $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$ possèdent respectivement n zéros simples à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et à μ_1, \dots, μ_n . Les formes de l'exemple:

précédent se généralisent à

$$G_+(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \mu_1} P_1\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda - \mu_n} P_n\right) \quad (2.2.2.18)$$

et

$$G_-(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda - \lambda_n} P_n\right) \dots \left(1 + \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \lambda_1} P_1\right) \quad (2.2.2.19)$$

où P_1, \dots, P_n sont n opérateurs de projection. De plus,

$$G_+(\lambda_k) = U_k(1 - P_k)V_k \quad (2.2.2.20)$$

et

$$G_-(\mu_k) = V_k^{-1}(1 - P_k)U_k^{-1} \quad (2.2.2.21)$$

où

$$U_k \equiv \left(1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda_k - \mu_1} P_1\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_{k-1} - \mu_{k-1}}{\lambda_k - \mu_{k-1}} P_{k-1}\right)$$

et $V_k \equiv \left(1 - \frac{\lambda_{k+1} - \mu_{k+1}}{\lambda_k - \mu_{k+1}} P_{k+1}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_k - \mu_n} P_n\right)$ (2.2.2.22)

sont des matrices non dégénérées. Les sous-espaces

$$N_{0k} \equiv \text{Im}(1 - P_k)$$

et

$$M_{0k} \equiv \text{Ker}(1 - P_k) \quad (2.2.2.23)$$

sont disjoints et complémentaires:

$$N_{0k} \oplus M_{0k} = \mathbb{C}^N \quad (2.2.2.24)$$

Ceci permet de définir les sous-espaces suivants:

$$N_k \equiv \text{Im}(G_+(\lambda_k)) = U_k N_{0k}$$

$$M_k \equiv \text{Ker} (G_-(\mu_k)) = U_k M_{0k} \quad (2.2.2.25)$$

qui sont également complémentaires et qui satisfont à:

$$N_k \oplus M_k = \mathbb{C}^N \quad (2.2.2.26)$$

Le problème est donc de construire une paire de fonctions $G_+(\lambda)$ et $G_-(\lambda)$ de manière à avoir

$$\text{Im} (G_+(\lambda_k)) = N_k$$

et

$$\text{Ker} (G_-(\mu_k)) = M_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.2.2.27)$$

Ces matrices doivent être méromorphes dans tout le plan complexe avec des zéros et des pôles aux points (λ_i, μ_i) $i = 1, \dots, n$. La condition $G_+(\lambda)G_-(\lambda) = 1$ entraîne que les pôles de $G_+(\lambda)$ (aux points μ_1, \dots, μ_n) coïncident avec les zéros de $G_-(\lambda)$ tandis que les pôles de $G_-(\lambda)$ (aux points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) coïncident avec les zéros de $G_+(\lambda)$. La méthode suivante est basée sur l'expansion de $G_+(\lambda)$ et de $G_-(\lambda)$ en fractions où il est commode de redéfinir

$$\chi(\lambda) \equiv G_-(\lambda) = G_+^{-1}(\lambda) \quad (2.2.2.28)$$

et

$$\chi^{-1}(\lambda) \equiv G_-^{-1}(\lambda) = G_+(\lambda) \quad (2.2.2.29)$$

avec

$$\chi(\lambda)\chi^{-1}(\lambda) = 1 \quad (2.2.2.30)$$

L'approche usuelle aux solutions solitoniques [3] suppose dès le départ que les zéros et les pôles sont tous simples. En choisissant la normalisation canonique ($\chi(\lambda = \infty) = 1$), il est alors possible de développer $\chi(\lambda)$ et $\chi^{-1}(\lambda)$ en fractions partielles:

$$\chi(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{\lambda - \lambda_i}, \quad \text{Rang} (Q_i) = k_i \quad (2.2.2.31)$$

et

$$\chi^{-1}(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\lambda - \mu_i}, \quad \text{Rang}(R_i) = l_i \quad (2.2.232)$$

$$\text{où } Q_i = Z_i \xi_i^+ \text{ et } R_i = \eta_i Y_i^+ \quad (2.2.233)$$

Z_i, ξ_i sont des matrices rectangulaires de dimensions $N \times k_i$ et de rang maximal. η_i, Y_i sont de dimensions $N \times l_i$. La factorisation (2.2.233) est arbitraire puisque $\tilde{Z}_i = Z_i g_i$ et $\tilde{\xi}_i^+ = g_i^{-1} \xi_i^+$, où les g_i sont des matrices non singulières, constituent une autre base donnant lieu aux mêmes résidus matriciels. La condition $\chi(\lambda)\chi^{-1}(\lambda) = 1$ avec l'annulation des résidus aux λ_i et μ_i , $i = 1, \dots, n$, entraînent les équations matricielles

$$\xi^+ + \Gamma Y^+ = 0 \quad (2.2.234a)$$

et

$$\eta^+ - \Gamma^+ Z^+ = 0 \quad (2.2.234b)$$

où

$$\begin{aligned} \xi^+ &\equiv \begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \\ \vdots \\ \xi_n^+ \end{pmatrix}, \quad Y^+ \equiv \begin{pmatrix} Y_1^+ \\ Y_2^+ \\ \vdots \\ Y_n^+ \end{pmatrix}, \\ \eta^+ &\equiv \begin{pmatrix} \eta_1^+ \\ \eta_2^+ \\ \vdots \\ \eta_n^+ \end{pmatrix}, \quad Z^+ \equiv \begin{pmatrix} Z_1^+ \\ Z_2^+ \\ \vdots \\ Z_n^+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.235)$$

sont des matrices rectangulaires de dimensions $n \times N$ avec $N = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n l_i$. La matrice Γ , de dimensions $N \times N$, est constituée des blocs (Γ_{ij}) $i, j = 1, \dots, n$, de dimensions $k_i \times l_j$, donnés par:

$$\Gamma_{ij} \equiv \frac{\xi_i^+ \eta_j}{\lambda_i - \mu_j}. \quad (2.2.236)$$

Par la suite, on supposera que $k_i = l_i = 1 \forall i = 1, \dots, n$ ce qui signifie que tous les résidus (Q_i, R_i) sont de rang 1 (les blocs Γ_{ij} sont donc de dimension 1). Les

trois exemples de cette section démontrent que le problème de Riemann singulier “trivial” (ie avec $G(\lambda) = 1$) peut se réduire à un problème d’algèbre linéaire. D’une manière plus générale, il est également possible de réduire un problème de Riemann matriciel, non trivial et avec zéros à un système d’équations algébriques et intégrales. Les détails de ce dernier cas sont explicites en [1], mais omis ici. En fait, la méthode d’habillage restreinte aux solitons, qui est le sujet de la section suivante, requiert seulement le formalisme d’un problème de Riemann trivial.

2.3 Méthode d’habillage et solitons.

Revenons au problème linéaire associé de la section (2.1) défini par les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t, \lambda) = U(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda) \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t, \lambda) = V(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda) \quad (2.3.2)$$

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (2.3.3)$$

et à la solution triviale donnée par

$$U_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

$$V_0(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

$$F_0(x, t, \lambda) = \exp(U_0(\lambda)x + V_0(\lambda)t) \quad (2.3.6)$$

Soit une matrice

$$G(x, t, \lambda) = F_0(x, t, \lambda)G(\lambda)F_0^{-1}(x, t, \lambda) \quad (2.3.7)$$

définie pour chaque point fixe (x, t) où $G(\lambda)$ est donnée sur une courbe fermée γ de la sphère de Riemann complexe d’un paramètre λ .

Soit également des fonctions matricielles $G_+(x, t, \lambda)$ et $G_-(x, t, \lambda)$, définies sur le parcours γ par

$$G_+(x, t, \lambda)G_-(x, t, \lambda) = G(x, t, \lambda) \quad (2.3.8)$$

respectivement holomorphes à l'intérieur et à l'extérieur de γ .

Définissons aussi les matrices

$$\begin{aligned} F_+(x, t, \lambda) &= G_+^{-1}(x, t, \lambda)F_0(x, t, \lambda) \\ U_+(x, t, \lambda) &= G_+^{-1}U_0(\lambda)G_+ - G_+^{-1}G_{+x} \\ V_+(x, t, \lambda) &= G_+^{-1}V_0(\lambda)G_+ - G_+^{-1}G_{+t} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

à l'intérieur du parcours et les matrices

$$\begin{aligned} F_-(x, t, \lambda) &= G_-(x, t, \lambda)F_0(x, t, \lambda) \\ U_-(x, t, \lambda) &= G_-U_0G_-^{-1} + G_{-x}G_-^{-1} \\ V_-(x, t, \lambda) &= G_-V_0G_-^{-1} + G_{-t}G_-^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

à l'extérieur de ce parcours. Les équations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\pm}}{\partial x}(x, t, \lambda) &= U_{\pm}(x, t, \lambda)F_{\pm}(x, t, \lambda) \\ \frac{\partial F_{\pm}}{\partial t}(x, t, \lambda) &= V_{\pm}(x, t, \lambda)F_{\pm}(x, t, \lambda) \\ U_{\pm t} - V_{\pm x} + [U_{\pm}, V_{\pm}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

tandis que sur la courbe γ :

$$U(x, t, \lambda) \equiv U_+(x, t, \lambda) = U_-(x, t, \lambda)$$

et

$$V(x, t, \lambda) \equiv V_+(x, t, \lambda) = V_-(x, t, \lambda) \quad (2.3.12)$$

Les fonctions matricielles $U(x, t, \lambda)$ et $V(x, t, \lambda)$ sont globalement définies et possèdent la même structure analytique que $U_0(\lambda)$ et $V_0(\lambda)$. De plus, il existe une fonction

matricielle $F(x, t, \lambda)$ vérifiant les équations (2.3.1) - (2.3.3). (U, V, F) représente une "solution habillée" des équations de courbure nulle.

Les solitons s'obtiennent lorsque

$$G(\lambda) = 1 \quad (2.3.13)$$

et que

$$\begin{aligned} \chi^{-1}(x, t, \lambda) &\equiv G_+(x, t, \lambda) \\ \chi(x, t, \lambda) &\equiv G_-(x, t, \lambda) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

sont définies comme étant des fonctions matricielles à pôles fixes. Ces fonctions sont globalement méromorphes dans le plan complexe du paramètre λ .

La prochaine section traite de la réduction du problème linéaire (équations (2.3.1) à (2.3.3)) aux solutions déterminées par les matrices $U(x, t, \lambda)$ et $V(x, t, \lambda)$ des équations (2.1.3) et (2.1.4).

2.4 Réduction du problème linéaire associé.

La réduction consiste à imposer des contraintes additionnelles à un système matriciel de Zakharov-Shabat général:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, t, \lambda) &= U(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, t, \lambda) &= V(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

afin de le rendre équivalent au modèle considéré. Le système (2.4.1) est invariant par rapport aux transformations (2.1.7).

Exigeons de plus que les matrices U, V et F soient fixes par rapport aux automorphismes algébriques suivants:

$$\begin{aligned} U^+(x, t, \lambda) &= -\tau U(x, t, \bar{\lambda})\tau \\ V^+(x, t, \lambda) &= -\tau V(x, t, \bar{\lambda})\tau \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

où $U(x, t, \lambda)$, $V(x, t, \lambda)$ et τ sont des matrices carrées d'ordre deux avec

$$\tau \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}, \quad (2.4.3)$$

$$\epsilon \equiv \text{Signe}(K) \quad (2.4.4)$$

Demandons également que les traces des matrices U et V soient nulles. L'habillage de la solution triviale du système (2.4.1):

$$\begin{aligned} U &= \chi U_0 \chi^{-1} + \chi_x \chi^{-1} \\ V &= \chi V_0 \chi^{-1} + \chi_t \chi^{-1} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

où $U_0(\lambda)$ et $V_0(\lambda)$ sont données par l'équation (2.1.10) ainsi que la condition de normalisation canonique:

$$\chi(\infty) = \chi^{-1}(\infty) = 1 \quad (2.4.6)$$

permettent d'écrire les matrices $U(x, t, \lambda)$ et $V(x, t, \lambda)$, respectivement restreintes à des polynômes de degrés un et deux, sous la forme:

$$\begin{aligned} U(x, t, \lambda) &= A(x, t) + \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ V(x, t, \lambda) &= B(x, t) + \lambda C(x, t) + \frac{i\lambda^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

où $A(x, t)$, $B(x, t)$ et $C(x, t)$ sont des matrices carrées d'ordre deux.

Avec ces définitions, l'équation de courbure nulle

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad (2.4.8)$$

est équivalente au système suivant:

$$\begin{aligned} A_t - B_x + [A, B] &= 0 \\ -C_x + \frac{1}{2i}[\sigma_3, B] + [A, C] &= 0 \\ [\sigma_3, C] - [A, \sigma_3] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Les formes spécifiques des matrices $U(x, t, \lambda)$ et $V(x, t, \lambda)$, correspondant à l'équation de Schrödinger non linéaire, sont tirées de ce système et des relations (2.4.2), dites d'involution.

$$\begin{aligned}
U(x, t, \lambda) &= \sqrt{K} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
V(x, t, \lambda) &= i\sqrt{K} \begin{pmatrix} \sqrt{K}|\psi|^2 & -\bar{\psi}_x \\ \psi_x & -\sqrt{K}|\psi|^2 \end{pmatrix} - \lambda\sqrt{K} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{i\lambda^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

L'involution, caractérisant ces matrices, entraîne naturellement celle de la matrice d'habillage $\chi(x, t, \lambda)$. En effet, la solution particulière du système (2.4.1) est définie par

$$F_0(x, t, \lambda) = \exp(U_0(\lambda)x + V_0(\lambda)t) \tag{2.4.11}$$

et la solution habillée par

$$F(x, t, \lambda) = \chi(x, t, \lambda)F_0(x, t, \lambda) \tag{2.4.12}$$

Les involutions de $U_0(\lambda)$ et $V_0(\lambda)$, qui sont les mêmes que celles de $U(x, t, \lambda)$ et $V(x, t, \lambda)$, entraînent la relation

$$F_0^+(x, t, \lambda) = \tau F_0^{-1}(x, t, \bar{\lambda})\tau \tag{2.4.13}$$

De plus, la forme adjointe du système (2.4.1) est équivalente au système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\tau F^+(x, t, \lambda)\tau) &= -(\tau F^+(x, t, \lambda)\tau)U(x, t, \bar{\lambda}) \\
\frac{\partial}{\partial t}(\tau F^+(x, t, \lambda)\tau) &= -(\tau F^+(x, t, \lambda)\tau)V(x, t, \bar{\lambda})
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

D'autre part, le système (2.4.1) entraîne également

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^{-1}}{\partial x}(x, t, \bar{\lambda}) &= -F^{-1}(x, t, \bar{\lambda})U(x, t, \bar{\lambda}) \\
\frac{\partial F^{-1}}{\partial t}(x, t, \bar{\lambda}) &= -F^{-1}(x, t, \bar{\lambda})V(x, t, \bar{\lambda})
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

Par le théorème d'unicité des solutions d'équations différentielles avec conditions initiales, les relations (2.4.14), (2.4.15) et (2.4.13) impliquent l'involution de la solution habillée:

$$F^{-1}(x, t, \bar{\lambda}) = \tau F^+(x, t, \lambda) \tau \quad (2.4.16)$$

Finalement, la définition, (2.4.12) est équivalente à la relation:

$$\chi^{-1}(x, t, \bar{\lambda}) = F_0(x, t, \bar{\lambda}) F^{-1}(x, t, \bar{\lambda}) \quad (2.4.17)$$

Cette expression, combinée avec les involutions des matrices $F_0(x, t, \lambda)$ et $F(x, t, \lambda)$, donne l'involution de la matrice $\chi(x, t, \lambda)X$:

$$\chi^{-1}(x, t, \bar{\lambda}) = \tau \chi^+(x, t, \lambda) \tau \quad (2.4.18)$$

La dernière section traite du cas où les matrices d'habillage $\chi(x, t, \lambda)$ et $\chi^{-1}(x, t, \lambda)$ ont chacune n pôles simples. Des solitons de l'équation de Schrödinger non linéaire sont dérivés avec quelques graphiques.

2.5 Résumé du cas multi-solitons. (Référence: [1])

2.5.1 Définition des matrices d'habillage.

Les multi-solitons sont les solutions exactes obtenues lorsque les matrices d'habillage sont des fonctions méromorphes en λ ayant chacune n pôles de premier ordre. D'une manière générale, ces matrices, qui respectent la condition de normalisation canonique (2.4.6), peuvent s'écrire

$$\chi(x, t, \lambda) \equiv 1 + \sum_{i=1}^n \frac{Z_i \xi_i^+}{\lambda - \lambda_i} \quad (2.5.1.1)$$

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) \equiv 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i Y_i^+}{\lambda - \mu_i} \quad (2.5.1.2)$$

où les Z_i, ξ_i, η_i, Y_i $i = 1, \dots, n$ sont des vecteurs colonnes non nuls, fonctions de x et t mais indépendants du paramètre λ . Ces vecteurs sont arbitraires puisque les changements de bases définis par

$$\tilde{Z}_i = Z_i g_i, \quad \tilde{\xi}_i^+ = g_i^{-1} \xi_i^+ \quad (2.5.1.3)$$

$$\tilde{\eta}_i = \eta_i h_i, \quad \tilde{Y}_i^+ = h_i^{-1} Y_i^+, \quad (2.5.1.4)$$

où les g_i et h_i sont des fonctions scalaires de x et t non nulles, $i = 1, \dots, n$, laissent les matrices $\chi(x, t, \lambda)$ et $\chi^{-1}(x, t, \lambda)$ inchangées. Ces matrices sont celles de l'exemple 3 de la section (2.2.2). Rappelons que la condition du problème de Riemann trivial:

$$\chi(x, t, \lambda) \chi^{-1}(x, t, \lambda) = 1 \quad (2.5.1.5)$$

ainsi que l'annulation de tous les résidus entraînent les équations algébriques suivantes:

$$\begin{aligned} \xi^+ + \Gamma Y^+ &= 0 \\ \eta^+ - \Gamma^+ Z^+ &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.1.6)$$

où ξ^+, Y^+, η^+ et Z^+ sont définis par les relations (2.2.2.35) avec la matrice carrée Γ d'ordre deux donnée par

$$\Gamma_{ij} = \frac{\xi_i^+ \eta_j}{\lambda_i - \mu_j} \quad (2.5.1.7)$$

La section suivante détermine la dépendance de $\chi(x, t, \lambda)$ et $\chi^{-1}(x, t, \lambda)$ sur x et t .

2.5.2 Résolution des équations différentielles.

Ces équations proviennent de la définition des matrices habillées $U(x, t, \lambda)$ et $V(x, t, \lambda)$:

$$U(x, t, \lambda) = \chi U_0(\lambda) \chi^{-1} + \chi_x \chi^{-1} \quad (2.5.2.1)$$

$$V(x, t, \lambda) = \chi V_0(\lambda) \chi^{-1} + \chi_t \chi^{-1} \quad (2.5.2.2)$$

où

$$U_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, V_0(\lambda) = \frac{i\lambda^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5.2.3)$$

Ces relations doivent être satisfaites pour toute valeur de λ . De plus, les structures méromorphes en λ de $U(x, t, \lambda)$ et de $V(x, t, \lambda)$ doivent être respectivement les mêmes que celles de $U_0(\lambda)$ et de $V_0(\lambda)$. Il faut donc exiger l'annulation des résidus reliés aux pôles λ_i et μ_i . Les équations suivantes sont équivalentes aux précédentes mais ne contiennent que les pôles λ_i , $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \chi U_0(\lambda) + \chi_x &= U(x, t, \lambda) \chi \\ \chi V_0(\lambda) + \chi_t &= V(x, t, \lambda) \chi \end{aligned} \quad (2.5.2.4)$$

La substitution de la forme (2.5.1.1) suivie de l'annulation des résidus aux λ_i entraînent les équations

$$\begin{aligned} Z_i \xi_i^+ U_0(\lambda_i) + (Z_i \xi_i^+)_x &= U(\lambda_i) Z_i \xi_i^+ \\ Z_i \xi_i^+ V_0(\lambda_i) + (Z_i \xi_i^+)_t &= V(\lambda_i) Z_i \xi_i^+ \end{aligned} \quad (2.5.2.5)$$

Les vecteurs colonnes Z_i $i = 1, \dots, n$ sont non nuls ce qui permet de réécrire ce système:

$$\begin{aligned} \xi_i^+ U_0(\lambda_i) + \xi_{i,r}^+ &= (Z_i^+ Z_i)^{-1} Z_i^+ (-Z_{i,r} \xi_i^+ + U(\lambda_i) Z_i \xi_i^+) \\ \xi_i^+ V_0(\lambda_i) + \xi_{i,t}^+ &= (Z_i^+ Z_i)^{-1} Z_i^+ (-Z_{i,t} \xi_i^+ + V(\lambda_i) Z_i \xi_i^+) \end{aligned} \quad (2.5.2.6)$$

Il existe un changement de base du type (2.5.1.3) permettant d'annuler les membres de droite du système précédent. La nouvelle base obéit aux évolutions simplifiées suivantes:

$$\begin{aligned} \xi_{i,r} &= -U_0^+(\lambda_i) \xi_i \\ \xi_{i,t} &= -V_0^+(\lambda_i) \xi_i \end{aligned} \quad (2.5.2.7)$$

Les vecteurs colonnes ξ_i sont donc déterminés en posant

$$\xi_i(x, t) \equiv \begin{pmatrix} \gamma_i(x, t) \\ \delta_i(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.5.2.8)$$

avec les fonctions scalaires

$$\begin{aligned} \gamma_j(x, t) &= \gamma_{j0} \exp\left(\frac{\bar{\lambda}_j}{2i}(x - \bar{\lambda}_j t)\right) \\ \delta_j(x, t) &= \delta_{j0} \exp\left(-\frac{\bar{\lambda}_j}{2i}(x - \bar{\lambda}_j t)\right) \end{aligned} \quad (2.5.2.9)$$

où les δ_{i0} et les γ_{i0} sont des constantes arbitraires. Il est possible de réduire le nombre de ces paramètres en posant $g_i(x, t) = \bar{\delta}_i(x, t)$ dans les relations (2.5.1.3), définissant ainsi une autre base donnée par:

$$\xi_j(x, t) = \begin{pmatrix} \gamma_{j0} \exp(i\bar{\lambda}_j(\bar{\lambda}_j t - x)) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.2.10)$$

De la même manière, pour obtenir les évolutions des vecteurs colonnes qui composent la matrice $\chi^{-1}(x, t, \lambda)$, il faut partir d'équations, équivalentes à (2.5.2.1) et (2.5.2.2), contenant seulement les pôles μ_i . Un calcul semblable au précédent donne le résultat suivant:

$$\eta_j(x, t) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_j(x, t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.2.11)$$

où

$$\alpha_j(x, t) = \alpha_{j0} \exp(+i\mu_j(\mu_j t - x)) \quad (2.5.2.12)$$

et où les α_{j0} sont des constantes arbitraires.

Les équations (2.5.2.10), (2.5.2.11) ainsi que les relations algébriques (2.5.1.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^+ &= -\Gamma^{-1}\xi^+ \\ \mathbf{Z}^+ &= \Gamma^{+ -1}\eta^+ \end{aligned} \quad (2.5.2.13)$$

où

$$\Gamma_{ij} = \frac{\xi_i^+ \eta_j}{\lambda_i - \mu_j} \quad (2.5.2.14)$$

déterminent complètement les matrices $\chi(x, t, \lambda)$ et $\chi^{-1}(x, t, \lambda)$ du problème de Riemann trivial singulier avec un nombre fini de zéros simples. La prochaine section conclut avec les solutions explicites de l'équation de Schrödinger non linéaire correspondant à ces résultats.

2.5.3 Formules analytiques des multi-solitons.

Le point de départ est l'utilisation de la propriété d'involution de la matrice $\chi(x, t, \lambda)$ dérivée à la section 2.4:

$$\chi^{-1}(x, t, \bar{\lambda}) = \tau \chi^+(x, t, \lambda) \tau \quad (2.5.3.1)$$

où

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (2.5.3.2)$$

Cette condition d'invariance permet de réduire de moitié les fonctions qui constituent les matrices $\chi(x, t, \lambda)$ et $\chi^{-1}(x, t, \lambda)$. En effet, les décompositions (2.5.1.1) et (2.5.1.2) substituées dans la relation d'involution avec les définitions des vecteurs ξ_i et η_i , données par (2.5.2.10) et (2.5.2.11), amènent les contraintes suivantes:

$$\mu_i = \bar{\lambda}_i, \quad (2.5.3.3)$$

$$\alpha_i(x, t) = -\epsilon \gamma_i(x, t), \quad (2.5.3.4)$$

$$Y_i(x, t) = \begin{pmatrix} -\epsilon \rho_i(x, t) \\ \phi_i(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.5.3.5)$$

où

$$Z_i(x, t) \equiv \begin{pmatrix} \rho_i(x, t) \\ \phi_i(x, t) \end{pmatrix}. \quad (2.5.3.6)$$

A partir de là, il est possible de calculer la fonction complexe $\psi(x, t)$ en reprenant la définition de la matrice $U(x, t, \lambda)$:

$$U(x, t, \lambda) = \chi U_0(\lambda) \chi^{-1} + \chi_x \chi^{-1} \quad (2.5.3.7)$$

où

$$\chi(x, t, \lambda) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{Z_j \xi_j^+}{\lambda - \lambda_j}, \quad (2.5.3.8)$$

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j Y_j^+}{\lambda - \lambda_j}, \quad (2.5.3.9)$$

$$U(x, t, \lambda) = \sqrt{K} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5.3.10)$$

et

$$U_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5.3.11)$$

Les développements en puissance de $\frac{1}{\lambda}$ suivants:

$$\begin{aligned} \chi(x, t, \lambda) &= 1 + \sum_{i=1}^n \frac{Z_i \xi_i^+}{\lambda} + \theta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \\ \chi^{-1}(x, t, \lambda) &= 1 - \sum_{i=1}^n \frac{Z_i \xi_i^+}{\lambda} + \theta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \end{aligned} \quad (2.5.3.12)$$

sont ensuite substitués dans la relation d'habillage (2.5.3.7). Ceci est suivi d'une identification des termes indépendants par rapport à λ . Il en résulte la formule:

$$i\sqrt{K}\psi(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \bar{\gamma}_i(x, t) = \sqrt{\epsilon} \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i(x, t) \quad (2.5.3.13)$$

où $\epsilon = \text{Signe}(K)$.

C'est la relation algébrique (2.2.2.34) qui permet de calculer explicitement les fonctions $\rho_i(x, t)$ en écrivant:

$$\Gamma^+ \bar{\rho} = -\epsilon \bar{\gamma} \quad (2.5.3.14)$$

où

$$\bar{\rho} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\rho}_1 \\ \bar{\rho}_2 \\ \vdots \\ \bar{\rho}_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1 \\ \bar{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \bar{\gamma}_n \end{pmatrix} \quad (2.5.3.15)$$

La règle de Kramer appliquée au système (2.5.3.14) donne finalement

$$i\sqrt{K}\psi(x, t) = \frac{\epsilon\sqrt{\epsilon} \det(N)}{\det(\Gamma^+)} \quad (2.5.3.16)$$

où N est une matrice carrée d'ordre $n + 1$ définie par

$$N \equiv \begin{pmatrix} 0 & c^t \\ \bar{\gamma} & \Gamma^+ \end{pmatrix} \quad (2.5.3.17)$$

avec

$$c \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5.3.18)$$

$$\Gamma_{ij}^+ = \frac{\eta_j^+ \xi_i}{\bar{\lambda}_i - \lambda_j}, \quad (2.5.3.19)$$

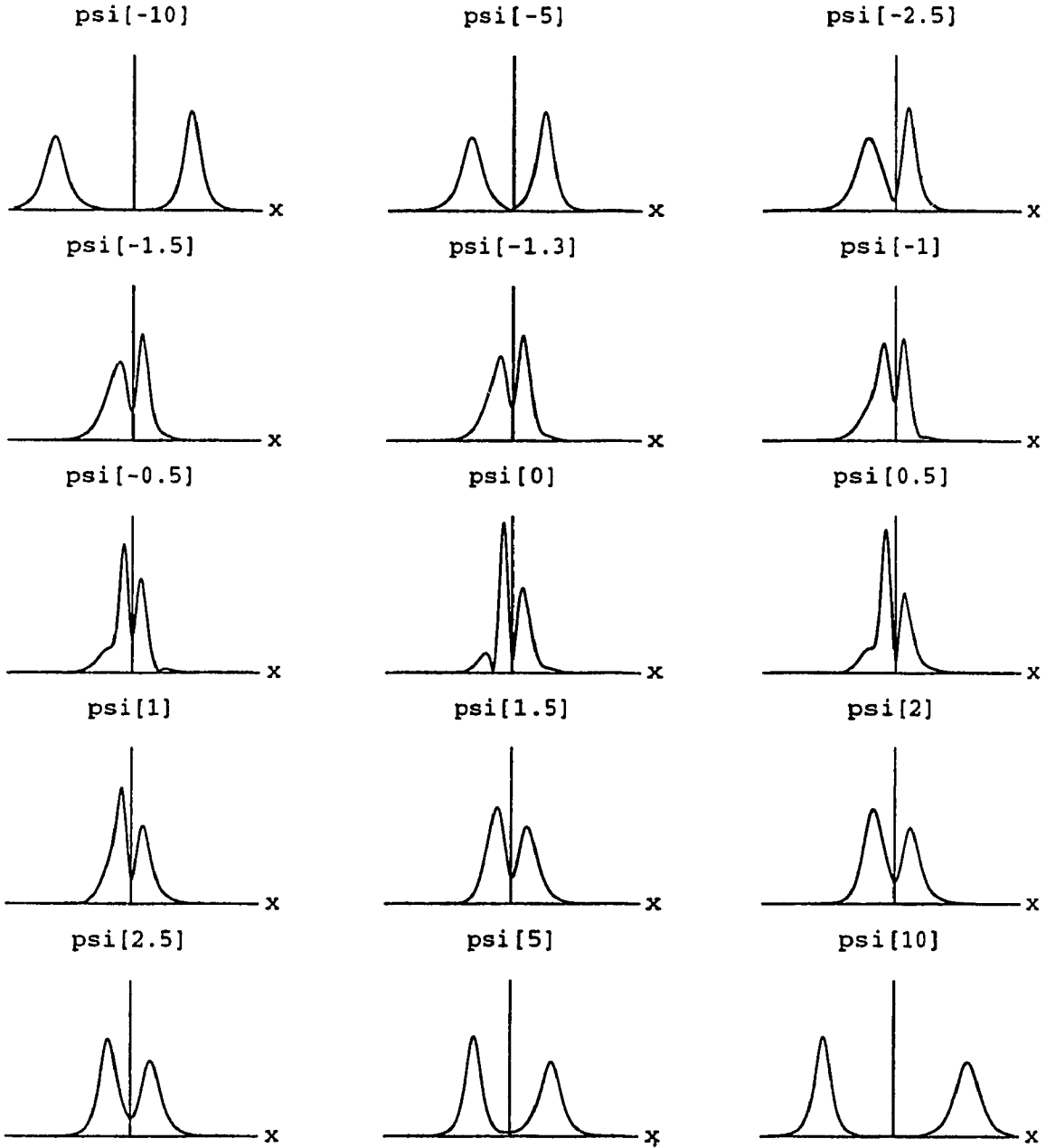
$$\eta_j = \begin{pmatrix} -\epsilon\gamma_j \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_i = \begin{pmatrix} \gamma_i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.3.20)$$

et

$$\gamma_j(x, t) = \gamma_{j0} \exp(i\bar{\lambda}_j(\bar{\lambda}_j t - x)) \quad (2.5.3.21)$$

Aux pages suivantes, on retrouve les graphiques de quelques multi-solitons $\psi(x, t)$. Le troisième chapitre traite le cas de matrices d'habillage avec un pôle unique de deuxième ordre. Comme on le verra, ceci donne lieu à un nouveau type de soliton.

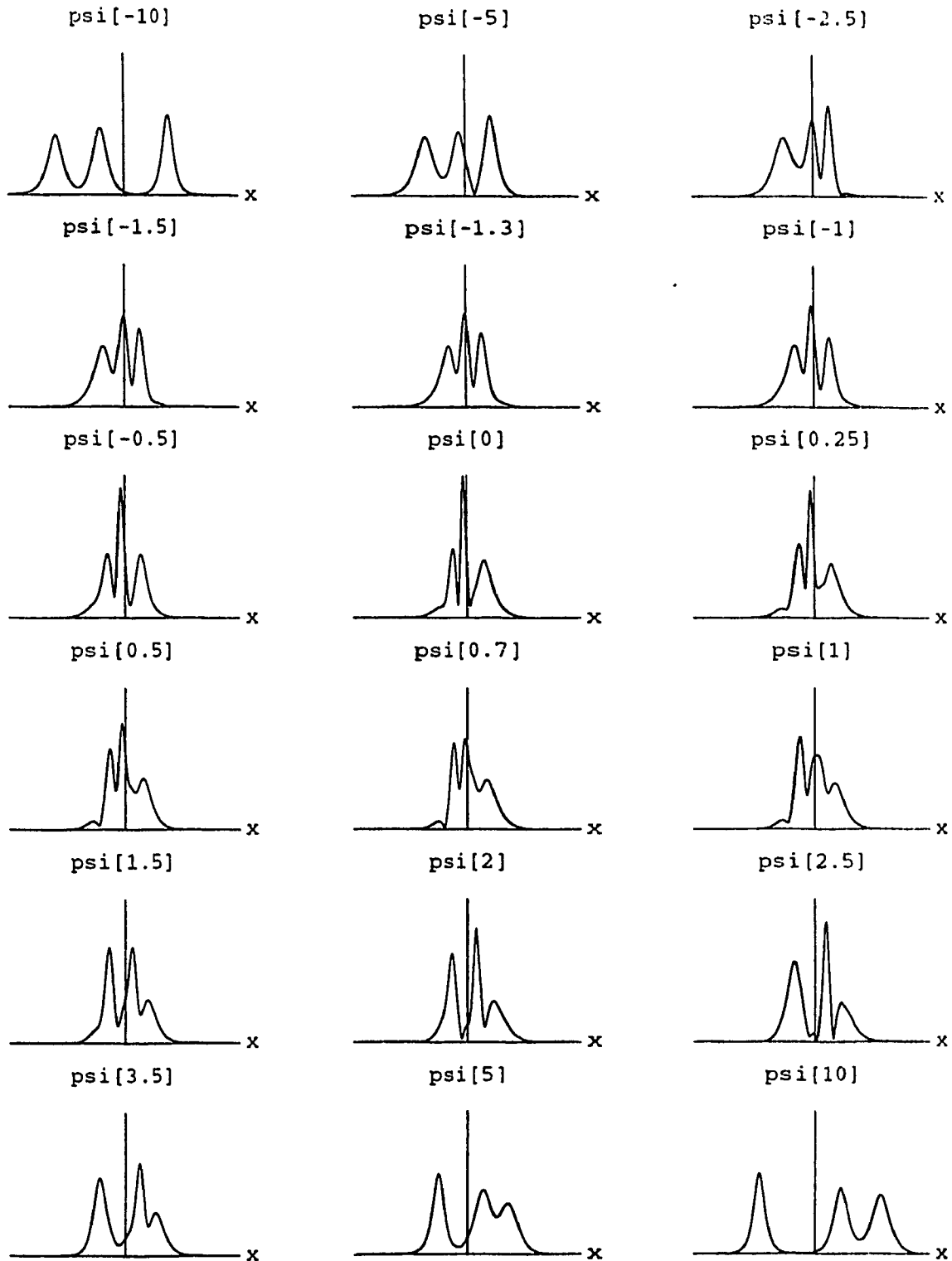
Deux - solitons



Graphique 2.1

Notation: $\text{psi}[t] = |\Psi(x,t)|$ Echelles: $x \rightarrow (-17,17)$
 $\text{psi}[t] \rightarrow (0,1.3)$
 Paramètres: $\lambda_1 = 0.6 + 0.63I$ $\lambda_2 = -0.5 + 0.845I$
 $\gamma_{10} = 0.7 + 0.4I$ $\gamma_{20} = -0.54 + 0.2I$

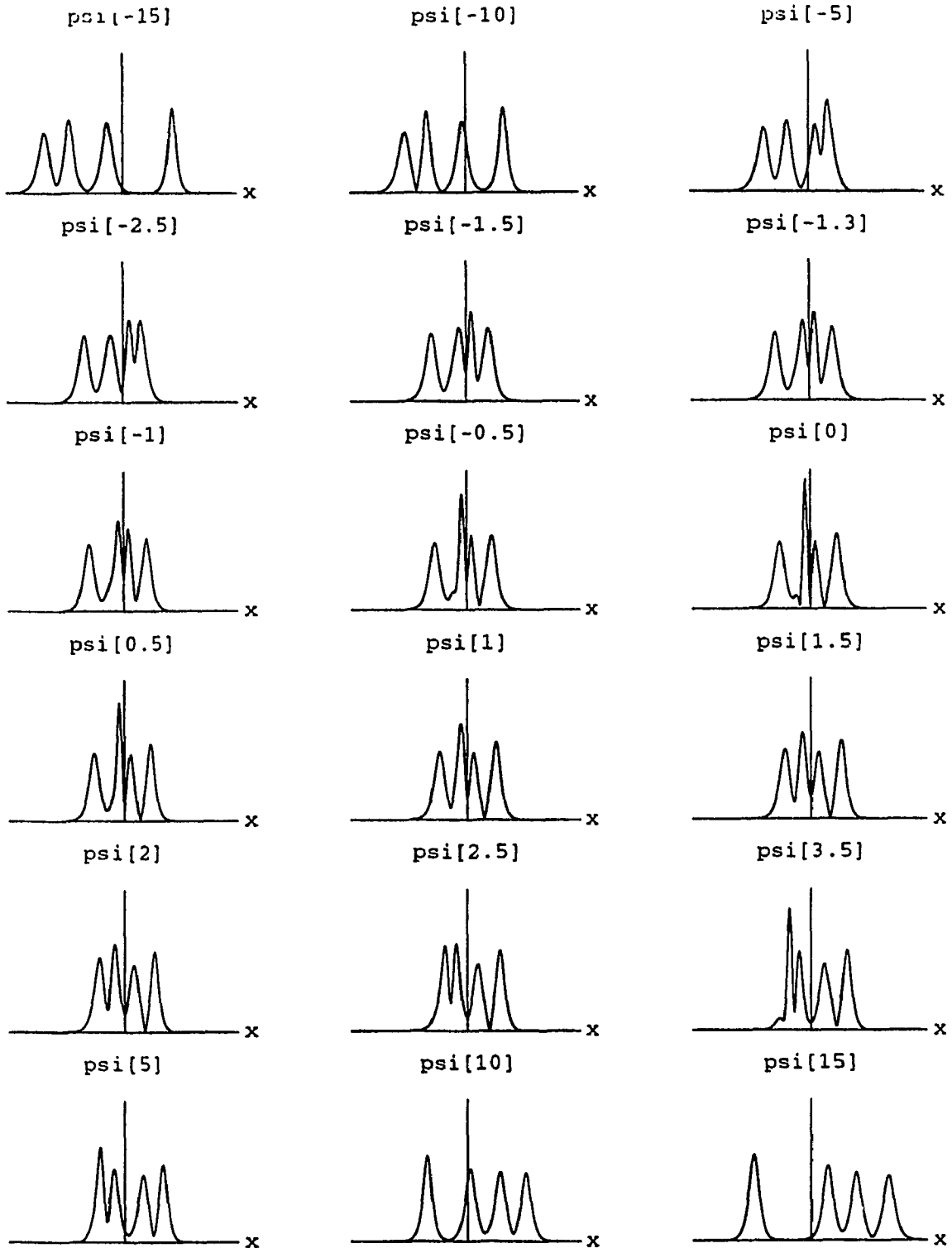
Trois_solitons



Graphique 2.2

Notation: $\psi [t] = |\Psi(x,t)|$ Echelles: $x \rightarrow (-20,20)$
 $\psi [t] \rightarrow (0,1.5)$
 Paramètres: $\lambda_1 = 0.6 + 0.63I$ $\lambda_2 = -0.5 + 0.845I$ $\lambda_3 = 0.35 - 0.715I$
 $\gamma_{10} = 0.7 + 0.4I$ $\gamma_{20} = -0.54 + 0.2I$ $\gamma_{30} = -0.4 - 0.6I$

Quatre_solitons



Graphique 2.3

Notation: $\text{psi}[t] = |\Psi(x,t)|$ Echelles: $x \rightarrow (-30,30)$

$\text{psi}[t] \rightarrow (0,1.4)$

Paramètres: $\lambda_1 = 0.6 + 0.63I$ $\lambda_2 = -0.5 + 0.845I$ $\lambda_3 = 0.35 - 0.715I$ $\lambda_4 = 0.42 + 0.7I$
 $\gamma_{10} = 0.7 + 0.4I$ $\gamma_{20} = -0.54 + 0.2I$ $\gamma_{30} = -0.4 - 0.6I$ $\gamma_{40} = 0.2 - 0.3I$

Chapitre troisième

Solitons de deuxième ordre

3.1 Définition des matrices d'habillage.

Les solitons appelés "solitons de deuxième ordre" sont les solutions exactes obtenues lorsque les matrices d'habillage sont des fonctions méromorphes en λ avec un pôle unique de deuxième ordre. En accord avec la condition de normalisation canonique (2.4.6) et d'une manière générale, ces matrices peuvent s'écrire:

$$\chi(x, t, \lambda) \equiv 1 + \frac{Z_1 \xi_2^+ + Z_2 \xi_1^+}{\lambda - \lambda_1} + \frac{Z_1 \xi_1^+}{(\lambda - \lambda_1)^2} \quad (3.1.1)$$

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) \equiv 1 + \frac{\eta_1 Y_2^+ + \eta_2 Y_1^+}{\lambda - \mu_1} + \frac{\eta_1 Y_1^+}{(\lambda - \mu_1)^2} \quad (3.1.2)$$

où les Z_i, ξ_i, η_i, Y_i $i = 1, 2$ sont des vecteurs colonnes non nuls, fonctions de x et t et indépendants du paramètre λ . λ_1 et μ_1 sont des pôles fixes donnés. La structure particulière des décompositions de χ et χ^{-1} choisie ci-dessus permet une factorisation matricielle des équations algébriques et d'évolution qui les déterminent, ce qui en facilite la résolution. Les bases vectorielles sont d'ailleurs arbitraires; en effet,

$$\chi(x, t, \lambda) = 1 + [Z_2 Z_1] \Lambda \begin{bmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

où

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_1)^{-1} & 0 \\ (\lambda - \lambda_1)^{-2} & (\lambda - \lambda_1)^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

La matrice Λ commute avec toute matrice d'ordre et de rang 2 de la forme

$$G \equiv \begin{pmatrix} g(x, t) & 0 \\ h(x, t) & g(x, t) \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

Ainsi, tout changement de base du type

$$[Z_2 Z_1] \rightarrow [Z_2 Z_1] G \quad (3.1.6)$$

accompagné de

$$[\xi_1 \xi_2] \rightarrow [\xi_1 \xi_2] G^{+-1} \quad (3.1.7)$$

laisse invariante la forme de χ . La même propriété caractérise également les vecteurs colonnes qui composent χ^{-1} . De telles transformations seront appliquées lors de la résolution des équations différentielles vérifiées par les matrices d'habillage pour calculer les solutions et pour minimiser le nombre de paramètres arbitraires.

À la section suivante, les équations algébriques reliant les vecteurs qui définissent les matrices d'habillage sont résolues. La dépendance de χ et χ^{-1} sur x et t est omise afin d'alléger la notation.

3.2 Résolution des équations algébriques.

Ces équations proviennent directement de l'égalité $\chi(\lambda)\chi^{-1}(\lambda) = 1$. En y substituant les définitions (3.1.1) et (3.1.2), les systèmes suivants, écrits sous forme matricielle, sont obtenus par l'annulation des deux premiers coefficients de la partie principale de la série de Laurent de $\chi(\lambda)\chi^{-1}(\lambda) - 1$, développée autour de $\lambda = \lambda_1$:

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^+ & \xi_2^+ \\ 0 & \xi_1^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{-1}(\lambda_1) & \frac{d\chi^{-1}}{d\lambda}|_{\lambda_1} \\ 0 & \chi^{-1}(\lambda_1) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2.1)$$

et autour de $\lambda = \mu_1$:

$$\begin{pmatrix} \chi(\mu_1) & \frac{d\chi}{d\lambda}|_{\mu_1} \\ 0 & \chi(\mu_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1^+ & Y_2^+ \\ 0 & Y_1^+ \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2.2)$$

Par hypothèse, Z_1 est un vecteur colonne non nul ce qui implique que $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}$ est de rang maximal et que la matrice $\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}$ possède un inverse. Le système (3.2.1) peut être simplifié en le multipliant à gauche par le produit:

$$\left[\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}^+$$

ce qui entraîne les équations:

$$\xi_1^+ \chi^{-1}(\lambda_1) = 0 \quad (3.2.3a)$$

$$\xi_1^+ \frac{d\chi^{-1}}{d\lambda} |_{\lambda_1} + \xi_2^+ \chi^{-1}(\lambda_1) = 0 \quad (3.2.3b)$$

Or,

$$\chi^{-1}(\lambda_1) = 1 + \left(\frac{\eta_2}{\lambda_1 - \mu_1} + \frac{\eta_1}{(\lambda_1 - \mu_1)^2} \quad \frac{\eta_1}{\lambda_1 - \mu_1} \right) \begin{pmatrix} Y_1^+ \\ Y_2^+ \end{pmatrix} \quad (3.2.4a)$$

et

$$\frac{d\chi^{-1}}{d\lambda} |_{\lambda_1} = - \left(\frac{\eta_2}{(\lambda_1 - \mu_1)^2} + \frac{2\eta_1}{(\lambda_1 - \mu_1)^3} \quad \frac{\eta_1}{(\lambda_1 - \mu_1)^2} \right) \begin{pmatrix} Y_1^+ \\ Y_2^+ \end{pmatrix} \quad (3.2.4b)$$

Les équations (3.2.3) peuvent donc s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} Y_1^+ \\ Y_2^+ \end{pmatrix} = 0 \quad (3.2.5)$$

où Γ est une matrice d'ordre deux définie par:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\xi_1^+ \eta_2}{\lambda_1 - \mu_1} + \frac{\xi_1^+ \eta_1}{(\lambda_1 - \mu_1)^2} & \frac{\xi_1^+ \eta_1}{\lambda_1 - \mu_1} \\ \frac{\xi_2^+ \eta_2}{\lambda_1 - \mu_1} + \frac{\xi_2^+ \eta_1 - \xi_1^+ \eta_2}{(\lambda_1 - \mu_1)^2} - \frac{2\xi_1^+ \eta_1}{(\lambda_1 - \mu_1)^3} & \frac{\xi_2^+ \eta_1}{\lambda_1 - \mu_1} - \frac{\xi_1^+ \eta_1}{(\lambda_1 - \mu_1)^2} \end{pmatrix} \quad (3.2.6)$$

De la même manière, le vecteur colonne Y_1 est non nul et la matrice (2×2)

$\begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & Y_1 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & Y_1 \end{pmatrix}$ possède un inverse, ce qui permet la multiplication à droite du système (3.2.2) par le produit:

$$\begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & Y_1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} Y_1^+ & Y_2^+ \\ 0 & Y_1^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & Y_1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

Ceci entraîne le système simplifié:

$$\chi(\mu_1) \eta_1 = 0 \quad (3.2.7a)$$

$$\chi(\mu_1) \eta_2 + \frac{d\chi}{d\lambda} |_{\mu_1} \eta_1 = 0 \quad (3.2.7b)$$

En écrivant

$$\chi(\mu_1) = 1 + (Z_2 Z_1) \left(\frac{\xi_1^+}{\mu_1 - \lambda_1} + \frac{\xi_2^+}{(\mu_1 - \lambda_1)^2} \right) \quad (3.2.8a)$$

et

$$\frac{d\chi}{d\lambda} \Big|_{\mu_1} = -(Z_2 Z_1) \left(\frac{\xi_1^+}{(\mu_1 - \lambda_1)^2} + \frac{2\xi_2^+}{(\mu_1 - \lambda_1)^3} \right) \quad (3.2.8b)$$

les équations (3.2.7) deviennent:

$$(\eta_2 \eta_1) - (Z_2 Z_1) \Gamma = 0 \quad (3.2.9)$$

où Γ est la matrice d'ordre deux donnée par (3.2.6).

En résumé, la contrainte $\chi(\lambda)\chi^{-1}(\lambda) = 1$ avec deux pôles d'ordre deux est équivalente à quatre équations algébriques qui sont les conséquences de l'annulation des deux premiers termes de la partie principale de la série de Laurent associée à chacun de ces pôles. Ces équations, définies par (3.2.5) et par (3.2.9) amènent les solutions algébriques suivantes:

$$\begin{pmatrix} Y_1^+ \\ Y_2^+ \end{pmatrix} = -\Gamma^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \end{pmatrix} \quad (3.2.10a)$$

$$\begin{pmatrix} Z_2^+ \\ Z_1^+ \end{pmatrix} = \Gamma^{+^{-1}} \begin{pmatrix} \eta_2^+ \\ \eta_1^+ \end{pmatrix} \quad (3.2.10b)$$

où Γ , qui dépend des ξ_i, η_i $i = 1, 2$, est supposée de rang maximal. La dépendance sur x et t des vecteurs ξ_i, η_i $i = 1, 2$ est calculée à la section suivante.

3.3 Résolution des équations d'évolution.

Au deuxième chapitre, la solution triviale (U_0, V_0, F_0) du problème linéaire associé à l'équation de Schrödinger non linéaire a été habillée, définissant une solution non triviale de ce problème:

$$F(x, t, \lambda) = \chi(x, t, \lambda) F_0(x, t, \lambda) \quad (3.3.1a)$$

$$U(x, t, \lambda) = \chi U_0(\lambda) \chi^{-1} + \chi_x \chi^{-1} \quad (3.3.1b)$$

$$V(x, t, \lambda) = \chi V_0(\lambda) \chi^{-1} + \chi_t \chi^{-1} \quad (3.3.1c)$$

Ces équations doivent être satisfaites pour toute valeur de λ . De plus, les structures méromorphes en λ de $U(x, t, \lambda)$ et de $V(x, t, \lambda)$ doivent être respectivement identiques à celles de $U_0(\lambda)$ et de $V_0(\lambda)$.

Soit les équations suivantes, équivalentes à (3.3.1b) et à (3.3.1c), contenant seulement le pôle fixe λ_1 :

$$\chi U_0(\lambda) + \chi_x = U(x, t, \lambda) \chi \quad (3.3.2a)$$

$$\chi V_0(\lambda) + \chi_t = V(x, t, \lambda) \chi \quad (3.3.2b)$$

Pour que $U(x, t, \lambda)$ et $V(x, t, \lambda)$ conservent les structures méromorphes de U_0 et V_0 , il suffit d'exiger que, dans les équations (3.3.2), les deux premiers termes de la partie principale d'une série de Laurent (autour de $\lambda = \lambda_1$) du membre de gauche soient identiques à ceux du membre de droite. De cette contrainte et de la définition (3.1.1), découlent les équations aux dérivées partielles qui régissent les évolutions en x et t des vecteurs colonnes composant la matrice d'habillage χ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} \xi^+ \mathbf{U}_0(\lambda_1) + (\mathbf{Z} \xi^+)_x &= \mathbf{U}(x, t, \lambda_1) \mathbf{Z} \xi^+ \\ \mathbf{Z} \xi^+ \mathbf{V}_0(\lambda_1) + (\mathbf{Z} \xi^+)_t &= \mathbf{V}(x, t, \lambda_1) \mathbf{Z} \xi^+ \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

où

$$\mathbf{Z} \equiv \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}, \xi^+ = \begin{pmatrix} \xi_1^+ & \xi_2^+ \\ 0 & \xi_1^+ \end{pmatrix}, \quad (3.3.4)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U & \frac{dU}{d\lambda} \\ 0 & U \end{pmatrix}, \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} U_0 & \frac{dU_0}{d\lambda} \\ 0 & U_0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.5a)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V & \frac{dV}{d\lambda} \\ 0 & V \end{pmatrix}, \mathbf{V}_0 = \begin{pmatrix} V_0 & \frac{dV_0}{d\lambda} \\ 0 & V_0 \end{pmatrix} \quad (3.3.5b)$$

La forme factorisée des équations (3.3.3) permet, comme pour les équations algébriques de la section précédente, de séparer les vecteurs indépendants: ξ_i, η_i $i = 1, 2$ des

vecteurs dépendants: Y_i, Z_i $i = 1, 2$. Par hypothèse, Z est de rang maximal, ce qui permet d'écrire le système (3.3.3) sous la forme:

$$\begin{aligned}\xi_x + \mathbf{U}_0^+(\lambda_1)\xi &= \xi[\mathbf{Z}^+\mathbf{U}^+(\lambda_1) - \mathbf{Z}_x^+]\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^+\mathbf{Z})^{-1} \\ \xi_t + \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)\xi &= \xi[\mathbf{Z}^+\mathbf{V}^+(\lambda_1) - \mathbf{Z}_t^+]\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^+\mathbf{Z})^{-1}\end{aligned}\quad (3.3.6)$$

Il existe un changement de base du type (3.1.6) et (3.1.7) des vecteurs colonnes, tel que les membres de droite du système (3.3.6) disparaissent, simplifiant ainsi considérablement les équations différentielles. Pour vérifier cette affirmation, soit $\tilde{\xi} = \xi G(x, t)$, une nouvelle base, avec $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}G^{+^{-1}}(x, t)$ où $G(x, t)$, définie par (3.1.5), est non singulière. Il suffit de montrer que le système surdéterminé suivant, qui donne l'évolution désirée de $\tilde{\xi}$, est un système compatible.

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_x + \mathbf{U}_0^+(\lambda_1)\tilde{\xi} &= 0 \\ \tilde{\xi}_t + \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)\tilde{\xi} &= 0\end{aligned}\quad (3.3.7)$$

La condition de compatibilité $\tilde{\xi}_{xt} = \tilde{\xi}_{tx}$ est équivalente à

$$[\mathbf{U}_0^+(\lambda_1), \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)]\tilde{\xi} = 0 \quad (3.3.8)$$

où \mathbf{U}_0 et \mathbf{V}_0 sont définis par (3.3.5). Par hypothèse, $\tilde{\xi} \equiv \xi G(x, t)$ est de rang maximal ce qui entraîne

$$[\mathbf{U}_0^+(\lambda_1), \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)] = 0 \quad (3.3.9)$$

et donc

$$\begin{pmatrix} [V_0(\lambda_1), U_0(\lambda_1)] & \frac{d}{d\lambda}[V_0(\lambda), U_0(\lambda)]|_{\lambda_1} \\ 0 & [V_0(\lambda_1), U_0(\lambda_1)] \end{pmatrix} = 0 \quad (3.3.10)$$

Cette dernière équation est satisfaite puisque les matrices $U_0(\lambda)$ et $V_0(\lambda)$, définies au deuxième chapitre, ont été choisies de telle sorte que le crochet $[U_0(\lambda), V_0(\lambda)]$ s'annule.

Les équations différentielles (3.3.7) s'intègrent très facilement pour donner l'évolution:

$$\xi(x, t) = \exp(-\mathbf{U}_0^+(\lambda_1)x - \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)t)\xi_0 \quad (3.3.11)$$

où $\tilde{\xi}(x, t)$ a été rebaptisé $\xi(x, t)$ et où

$$\xi_0 \equiv \begin{pmatrix} \xi_{10} & 0 \\ \xi_{20} & \xi_{10} \end{pmatrix} \quad (3.3.12)$$

avec ξ_{10}, ξ_{20} , des vecteurs arbitraires. Soit les vecteurs $\xi_i(x, t)$ et ξ_{i0} $i = 1, 2$ explicitement définis par:

$$\xi_i(x, t) \equiv \begin{pmatrix} \overline{\gamma}_i(x, t) \\ \overline{\delta}_i(x, t) \end{pmatrix}, \xi_{i0} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma}_{i0} \\ \overline{\delta}_{i0} \end{pmatrix} \quad (3.3.13)$$

où $\gamma_i(x, t)$ et $\delta_i(x, t)$ sont des fonctions scalaires et où γ_{i0} et δ_{i0} sont des nombres complexes arbitraires. L'équation (3.3.11) entraîne les évolutions suivantes:

$$\overline{\gamma}_1(x, t) = \overline{\gamma}_{10} \exp \left[i \left(\frac{\overline{\lambda}_1^2}{2} t - \frac{\overline{\lambda}_1}{2} x \right) \right] \quad (3.3.14a)$$

$$\overline{\delta}_1(x, t) = \overline{\delta}_{10} \exp \left[i \left(\frac{\overline{\lambda}_1}{2} x - \frac{\overline{\lambda}_1^2}{2} t \right) \right] \quad (3.3.14b)$$

$$\overline{\gamma}_2(x, t) = \overline{\gamma}_1(x, t) i (\overline{\lambda}_1 t - \frac{x}{2}) + \overline{\gamma}_{20} \exp \left[\frac{i}{2} (\overline{\lambda}_1^2 t - \overline{\lambda}_1 x) \right] \quad (3.3.14c)$$

$$\overline{\delta}_2(x, t) = \overline{\delta}_1(x, t) i \left(\frac{x}{2} - \overline{\lambda}_1 t \right) + \overline{\delta}_{20} \exp \left[\frac{i}{2} (\overline{\lambda}_1 x - \overline{\lambda}_1^2 t) \right] \quad (3.3.14d)$$

Le changement de base suivant réduit de moitié le nombre de paramètres arbitraires:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1^+(x, t) \\ \tilde{\xi}_2^+(x, t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g(x, t) & 0 \\ h(x, t) & g(x, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^+(x, t) \\ \xi_2^+(x, t) \end{pmatrix} \quad (3.3.15)$$

où

$$g(x, t) \equiv \delta_1(x, t)^{-1}, h(x, t) \equiv \frac{-\delta_2(x, t)}{\delta_1(x, t)^2} \quad (3.3.16)$$

(on suppose $\delta_{10} \neq 0$).

Les vecteurs colonnes $\tilde{\xi}_i(x, t)$ $i = 1, 2$, renommés $\xi_i(x, t)$, sont alors définis par:

$$\xi_1(x, t) = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_1(x, t) \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2(x, t) = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_2(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.17)$$

où

$$\bar{\gamma}_1(x, t) = \bar{\gamma}_{10} \exp i(\bar{\lambda}_1^2 t - \bar{\lambda}_1 x) \quad (3.3.18a)$$

$$\bar{\delta}_1(x, t) = 1 \quad (3.3.18b)$$

$$\bar{\gamma}_2(x, t) = \bar{\gamma}_1(x, t)(\bar{\gamma}_{20} + 2i\bar{\lambda}_1 t - ix) \quad (3.3.18c)$$

De la même manière, pour obtenir les fonctions composant la matrice χ^{-1} , il est possible de dériver des équations différentielles dont le seul pôle est μ_1 . Le point de départ est donné par les équations (3.3.1b) et (3.3.1c) qui peuvent se réécrire:

$$U_0(\lambda)\chi^{-1} - \chi_x^{-1} = \chi^{-1}U(x, t, \lambda) \quad (3.3.19a)$$

$$V_0(\lambda)\chi^{-1} - \chi_t^{-1} = \chi^{-1}V(x, t, \lambda) \quad (3.3.19b)$$

Ce système se résoud par un calcul semblable à celui effectué pour le système (3.3.2) en exigeant l'égalité de part et d'autre des équations (3.3.19) des deux premiers termes de la partie principale des séries de Laurent autour de $\lambda = \mu_1$. Des équations différentielles triviales sont donc aussi obtenues pour les vecteurs indépendants qui composent χ^{-1} :

$$\eta_x - \mathbf{U}_0(\mu_1)\eta = 0 \quad (3.3.20a)$$

$$\eta_t - \mathbf{V}_0(\mu_1)\eta = 0 \quad (3.3.20b)$$

où

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.21)$$

$$\mathbf{U}_0(\mu_1) = \begin{pmatrix} U_0(\mu_1) & \frac{dU_0}{d\lambda}|_{\mu_1} \\ 0 & U_0(\mu_1) \end{pmatrix}, \mathbf{V}_0(\mu_1) = \begin{pmatrix} V_0(\mu_1) & \frac{dV_0}{d\lambda}|_{\mu_1} \\ 0 & V_0(\mu_1) \end{pmatrix} \quad (3.3.22)$$

L'intégration du système (3.3.20) donne l'évolution:

$$\eta(x, t) = \exp(\mathbf{U}_0(\mu_1)x + \mathbf{V}_0(\mu_1)t)\eta_0 \quad (3.3.23)$$

où

$$\eta_0 \equiv \begin{pmatrix} \eta_{10} & \eta_{20} \\ 0 & \eta_{10} \end{pmatrix} \quad (3.3.24)$$

et où η_{10}, η_{20} sont des vecteurs arbitraires.

Un changement de base final, similaire à (3.3.15), permet de minimiser le nombre de paramètres arbitraires de χ^{-1} et les vecteurs indépendants sont donnés par:

$$\eta_1(x, t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x, t) \\ 1 \end{pmatrix}, \eta_2(x, t) = \begin{pmatrix} \alpha_2(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.25)$$

où

$$\alpha_1(x, t) = \alpha_{10} \exp(i(\mu_1^2 t - \mu_1 x)), \quad (3.3.26a)$$

$$\alpha_2(x, t) = \alpha_1(x, t)(\alpha_{20} + 2i\mu_1 t - ix) \quad (3.3.26b)$$

avec α_{10}, α_{20} des nombres complexes arbitraires.

L'ensemble des équations (3.3.17), (3.3.18), (3.3.25), (3.3.26) et (3.2.6), (3.2.10) solutionne le problème de Riemann "trivial" avec des zéros d'ordre deux tout en conservant la structure méromorphe de la solution de départ, donnée par $U_0(\lambda)$ et $V_0(\lambda)$.

Il s'agit maintenant d'appliquer ces résultats au modèle de l'équation de Schrödinger non linéaire afin de déterminer explicitement la solution $\psi(x, t)$ de cette équation, correspondant aux matrices d'habillage définies au début de ce chapitre.

3.4 Formules analytiques des solitons d'ordre deux.

Ces formules s'obtiennent après un calcul similaire à celui de la section 2.5.3.

La propriété d'invariance par rapport à l'involution antilinéaire de la matrice $\chi(x, t, \lambda)$:

$$\chi^{-1}(x, t, \bar{\lambda}) = \tau \chi^+(x, t, \lambda) \tau \quad (3.4.1)$$

où

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

entraîne les contraintes suivantes:

$$\mu_1 = \bar{\lambda}_1 \quad (3.4.3)$$

$$\alpha_i(x, t) = -\epsilon \bar{\gamma}_i(x, t) \quad (3.4.4)$$

$$Y_i(x, t) = \begin{pmatrix} -\epsilon \rho_i(x, t) \\ \phi_i(x, t) \end{pmatrix} \quad (3.4.5)$$

où

$$Z_i(x, t) \equiv \begin{pmatrix} \rho_i(x, t) \\ \phi_i(x, t) \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

La fonction $\psi(x, t)$ de l'équation de Schrödinger non linéaire s'identifie à partir de la fonction matricielle $U(x, t, \lambda)$ donnée par

$$U(x, t, \lambda) = \chi U_0(\lambda) \chi^{-1} + \chi_x \chi^{-1} \quad (3.4.7)$$

où

$$\chi(x, t, \lambda) = 1 + \frac{Z_1 \xi_2^+ + Z_2 \xi_1^+}{\lambda - \lambda_1} + \frac{Z_1 \xi_1^+}{(\lambda - \lambda_1)^2}, \quad (3.4.8)$$

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) = 1 + \frac{\eta_1 Y_2^+ + \eta_2 Y_1^+}{\lambda - \bar{\lambda}_1} + \frac{\eta_1 Y_1^+}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad (3.4.9)$$

$$U(x, t, \lambda) = \sqrt{K} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4.10)$$

et

$$U_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4.11)$$

Les développements en puissance:

$$\chi(x, t, \lambda) = 1 + \frac{Z_1 \xi_2^+ + Z_2 \xi_1^+}{\lambda} + \theta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (3.4.12)$$

et

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) = 1 - \frac{Z_1 \xi_2^+ + Z_2 \xi_1^+}{\lambda} + \theta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (3.4.13)$$

substitués dans la relation (3.4.7) donnent la formule

$$i\sqrt{K}\psi(x, t) = \phi_1(x, t)\gamma_2(x, t) + \phi_2(x, t)\gamma_1(x, t) = \epsilon\bar{\rho}_2(x, t) \quad (3.4.14)$$

où $\epsilon = \text{Signe}(K)$.

La fonction $\rho_2(x, t)$ se calcule à partir de la relation algébrique (3.2.10b):

$$\begin{pmatrix} \bar{\rho}_2 & \bar{\phi}_2 \\ \bar{\rho}_1 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix} = \Gamma^{+-1} \begin{pmatrix} -\epsilon\gamma_2 & 0 \\ -\epsilon\gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.15)$$

où Γ est la matrice carrée d'ordre deux définie par l'équation (3.2.6).

La forme explicite de $\psi(x, t)$ est

$$\psi(x, t) = \frac{4 \operatorname{Im}(\lambda_1)[i \operatorname{Im}(\lambda_1)(\epsilon\gamma_1^2\bar{\gamma}_2 - \gamma_2) + \gamma_1(\epsilon|\gamma_1|^2 - 1)]}{\sqrt{K}[(|\gamma_1|^2 - \epsilon)^2 - \epsilon|\gamma_2|^2(2 \operatorname{Im}(\lambda_1))^2]} \quad (3.4.16)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1(x, t) &= \gamma_{10} \exp(i\lambda_1(x - \lambda_1 t)) \\ \gamma_2(x, t) &= (\gamma_{20} + ix - 2i\lambda_1 t)\gamma_1(x, t) \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

avec $\gamma_{10}, \gamma_{20}, \lambda_1$ des paramètres complexes arbitraires.

3.5 Structure du soliton d'ordre deux et comportement asymptotique.

Pour mettre en évidence la structure de la solution $\psi(x, t)$ il faut considérer les paramètres réels

$$\phi = \operatorname{Re}(\lambda_1)x + [(\operatorname{Im}(\lambda_1))^2 - (\operatorname{Re}(\lambda_1))^2]t \quad (3.5.1)$$

et

$$\zeta = \text{Im}(\lambda_1)(x - 2 \text{Re}(\lambda_1)t) \quad (3.5.2)$$

représentant respectivement la phase et l'axe du "centre de gravité" du soliton.

Avec ces nouvelles définitions, les fonctions $\gamma_i(x, t)$ deviennent:

$$\gamma_1(\phi, \zeta) = \gamma_{10} e^{i\phi - \zeta}$$

et

$$\gamma_2(\phi, \zeta, t) = (\gamma_{20} + \frac{i\zeta}{\text{Im}(\lambda_1)} + 2 \text{Im}(\lambda_1)t) \gamma_1(\phi, \zeta) \quad (3.5.3)$$

Il faut distinguer les cas $\epsilon = +1$ ou -1 avec $\epsilon = \text{Signe}(K)$. Quels que soient les paramètres, le cas $\epsilon = +1$ est singulier par les nombreux zéros du dénominateur. Un graphique représentant l'évolution en x lorsque t est fixé de la fonction $\psi(x, t)$ non bornée est présenté à la fin du chapitre.

L'étude suivante du comportement asymptotique de la fonction $\psi(x, t)$ n'est valable que pour $\epsilon = -1$.

1) décroissance rapide: lorsque t est fixé et que $|\zeta| \rightarrow \infty$, la fonction tend exponentiellement vers zéro.

2) Structure de deux ondes solitaires: lorsque t tend vers $\pm\infty$, deux "bosses" d'amplitudes identiques apparaissent et s'éloignent sans se déformer du centre de gravité du soliton. Pour calculer la position, l'amplitude et la vitesse de ces bosses, il est nécessaire d'étudier la limite définie par

$$|t| \rightarrow \infty, |\zeta| \ll |t| \quad (3.5.4)$$

Avec ces conditions, la norme de la fonction $\psi(x, t)$ peut être approximée par:

$$|\psi(\phi, \zeta, t)| \cong \frac{|2 \text{Im}(\lambda_1)|^3 |\gamma_{10}| e^{-\zeta} |t| (1 + |\gamma_{10}|^2 e^{-2\zeta})}{|K|^{\frac{1}{2}} [|\gamma_{10}|^4 e^{-4\zeta} + 1 + (2 \text{Im}(\lambda_1))^4 |\gamma_{10}|^2 e^{-2\zeta} t^2]} \quad (3.5.5)$$

Les extrémums de cette norme sont définis par la contrainte:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} |\psi(\phi, \zeta, t)| = 0 \quad (3.5.6)$$

équivalente à

$$(|\gamma_{10}|^2 e^{-2\zeta} - 1)[|\gamma_{10}|^4 e^{-4\zeta} - (2 \operatorname{Im}(\lambda_1))^4 t^2 |\gamma_{10}|^2 e^{-2\zeta} + 1] = 0 \quad (3.5.7)$$

L'annulation du premier facteur donne la position du minimum correspondant au centre de gravité du soliton:

$$\zeta_{\min} = \ln |\gamma_{10}| \iff x_{\min} = 2 \operatorname{Re}(\lambda_1)t + \frac{\ln |\gamma_{10}|}{\operatorname{Im}(\lambda_1)} \quad (3.5.8)$$

L'annulation du deuxième facteur détermine la position des deux maximums en considérant les cas

$$1) e^{-\zeta} \cong \frac{1}{t} \text{ et } 2) e^{-\zeta} \gg 1 \quad (3.5.9)$$

qui donnent:

$$\begin{aligned} \zeta_{\max 1} &= \ln |t| + \ln [|\gamma_{10}|(2 \operatorname{Im}(\lambda_1))^2] \\ \iff x_{\max 1} &= 2 \operatorname{Re}(\lambda_1)t + \frac{\ln |t| + \ln [|\gamma_{10}|(2 \operatorname{Im}(\lambda_1))^2]}{\operatorname{Im}(\lambda_1)} \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

et

$$\begin{aligned} \zeta_{\max 2} &= \ln \frac{1}{|t|} + \ln \frac{|\gamma_{10}|}{(2 \operatorname{Im}(\lambda_1))^2} \\ \iff x_{\max 2} &= 2 \operatorname{Re}(\lambda_1)t + \frac{1}{\operatorname{Im}(\lambda_1)} \left[\ln \frac{1}{|t|} + \ln \frac{|\gamma_{10}|}{(2 \operatorname{Im}(\lambda_1))^2} \right] \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

La distance asymptotique entre les deux maximums est une fonction logarithmique:

$$\Delta x_{\max} \underset{|t| \rightarrow \infty}{\cong} \frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda_1)|} (2 \ln |t| + 4 \ln (2 \operatorname{Im}(\lambda_1))) \quad (3.5.12)$$

tandis que la différence des vitesses asymptotiques est inversement proportionnelle à t :

$$\Delta v = \frac{d}{dt} \Delta x_{\max} \underset{|t| \rightarrow \infty}{\cong} \frac{2}{|\operatorname{Im}(\lambda_1)| |t|} \quad (3.5.13)$$

Finalement, l'amplitude des deux bosses asymptotiques est la constante:

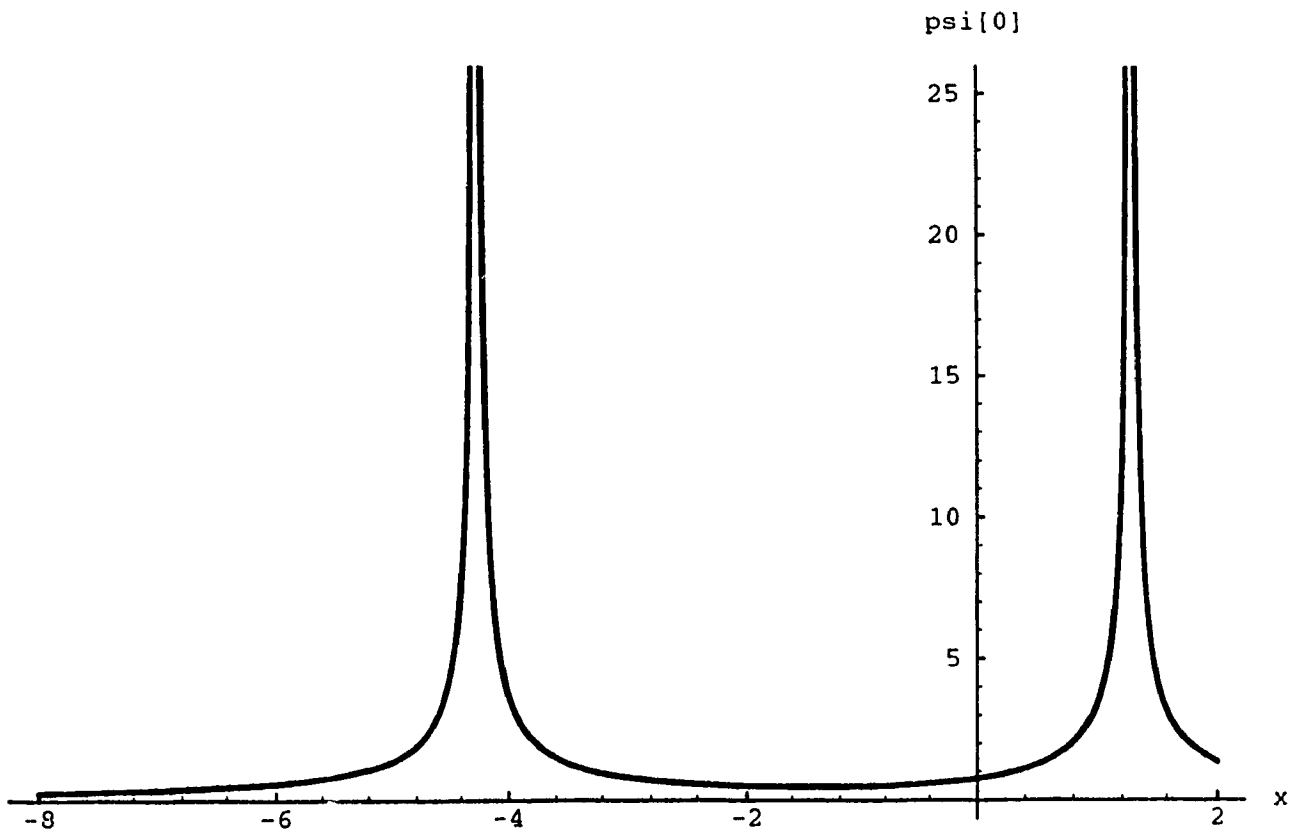
$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |\psi(\phi, \zeta_{\max 1,2})| = \frac{|\operatorname{Im}(\lambda_1)|}{|K|^{\frac{1}{2}}} \quad (3.5.14)$$

et l'amplitude du minimum tend vers zéro:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} |\psi(\phi, \zeta_{\min})| = 0 \quad (3.5.15)$$

Ces caractéristiques complètent l'étude du soliton obtenu pour des matrices d'habillage avec un pôle unique d'ordre deux. L'évolution d'un soliton de ce type, en fonction du paramètre t , est illustrée à la dernière page du chapitre.

Soliton singulier d'ordre deux



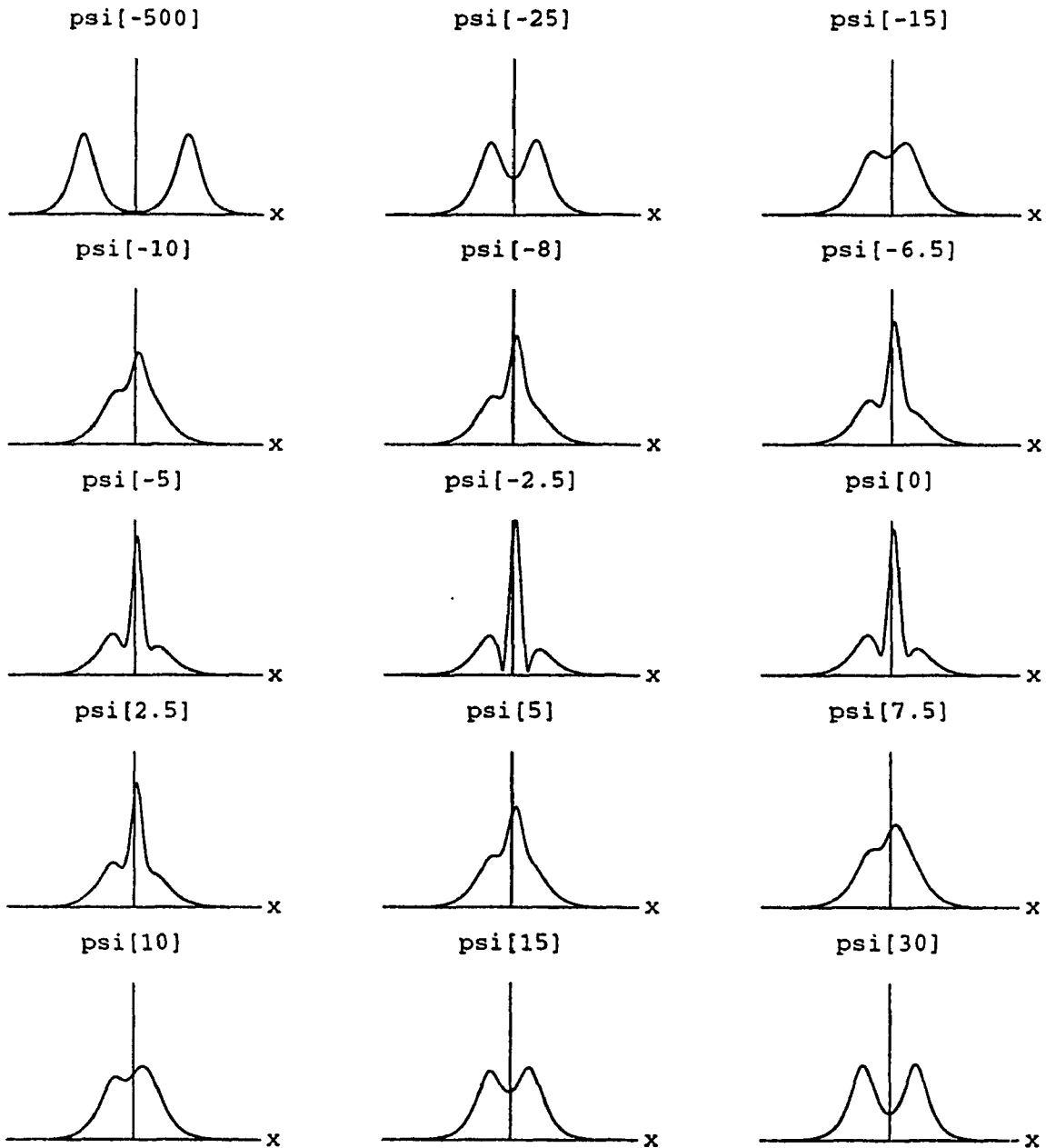
Graphique 3.1

Notation: $\text{psi}[t] = |\Psi(x,t)|$

Paramètres: $\lambda_1 = 0.3I$

$\gamma_{10} = 0.13 + 0.25I$ $\gamma_{20} = -0.34 + 0.15I$

Solitons de deuxieme ordre



Graphique 3.2

Notation: $\text{psi}[t] = |\Psi(x,t)|$ Echelles: $x \rightarrow (-30,30)$
 $\text{psi}[t] \rightarrow (0,0.6)$

Paramètres: $\lambda_1 = 0.3I$
 $\gamma_{10} = 0.13 + 0.25I$ $\gamma_{20} = -0.34 + 0.15I$

Chapitre quatrième

Solitons d'ordre supérieur

Ce chapitre est une généralisation du précédent au cas où les matrices d'habillage sont des fonctions méromorphes en λ avec un pôle unique d'ordre n , n étant un nombre entier quelconque. Une décomposition vectorielle, permettant une résolution facile des équations algébriques et différentielles vérifiées par les matrices d'habillage, est choisie. Des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire, de type soliton, sont obtenues avec des graphiques.

4.1 Définition des matrices d'habillage.

Soit les matrices d'habillage suivantes:

$$\chi(x, t, \lambda) \equiv 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{Z_{i-j+1} \xi_j^+}{(i-j)!(j-1)!(\lambda - \lambda_1)^{n-i+1}} \quad (4.1.1)$$

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) \equiv 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\eta_{i-j+1} Y_j^+}{(i-j)!(j-1)!(\lambda - \mu_1)^{n-i+1}} \quad (4.1.2)$$

Ces fonctions matricielles se conforment à la normalisation canonique (2.4.6). Les vecteurs colonnes Z_i, ξ_i, η_i, Y_i $i = 1, \dots, n$ sont supposés non nuls et dépendent seulement de x et t . λ_1 et μ_1 sont des pôles fixes donnés d'ordre n .

$\chi(x, t, \lambda)$ peut se réécrire:

$$\chi = 1 + (Z_n Z_{n-1} \dots Z_1) \Lambda \begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \\ \vdots \\ \xi_n^+ \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

où

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{C_0^{n-1}(\lambda-\lambda_1)^{-1}}{(n-1)!} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{C_0^{n-2}(\lambda-\lambda_1)^{-2}}{(n-2)!} & \frac{C_1^{n-1}(\lambda-\lambda_1)^{-1}}{(n-1)!} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{C_0^{n-3}(\lambda-\lambda_1)^{-3}}{(n-3)!} & \frac{C_1^{n-2}(\lambda-\lambda_1)^{-2}}{(n-2)!} & \frac{C_2^{n-1}(\lambda-\lambda_1)^{-1}}{(n-1)!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{C_0^0(\lambda-\lambda_1)^{-n}}{0!} & \frac{C_1^1(\lambda-\lambda_1)^{-n+1}}{1!} & \frac{C_2^2(\lambda-\lambda_1)^{-n+2}}{2!} & \dots & \frac{C_{n-1}^{n-1}(\lambda-\lambda_1)^{-1}}{(n-1)!} \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

est une matrice carrée d'ordre n , triangulaire. Les vecteurs colonnes de $\chi(x, t, \lambda)$ sont donc uniques au changement de base près:

$$\begin{aligned} (Z_n Z_{n-1} \dots Z_1) &\rightarrow (Z_n Z_{n-1} \dots Z_1)G \\ (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) &\rightarrow (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)G^{+^{-1}} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

où G est une matrice carrée d'ordre n :

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x, t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_1(x, t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & g_1(x, t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2(x, t) & 0 & 0 & \dots & g_1(x, t) \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

et où $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$ sont des fonctions scalaires arbitraires avec $g_1(x, t)$ non nulle.

Toute matrice de cette forme respecte la condition

$$[G, \Lambda] = 0 \quad (4.1.7)$$

et laisse la matrice d'habillement χ invariante. La matrice χ^{-1} possède également cette propriété d'invariance pour tout changement de base du type (4.1.5). La section suivante donne les équations algébriques vérifiées par les vecteurs colonnes des matrices d'habillement.

4.2 Résolution des équations algébriques.

L'annulation de tous les coefficients de la partie principale des séries de Laurent autour de λ_1 et de μ_1 du membre de gauche de l'équation $\chi(\lambda)\chi^{-1}(\lambda) = 1$ entraîne les systèmes algébriques suivants:

$$\mathbf{Z}\xi^+\hat{\chi}^{-1}(\lambda_1) = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\hat{\chi}(\mu_1)\eta\mathbf{Y}^+ = 0 \quad (4.2.2)$$

où

$$\mathbf{Z} \equiv \begin{bmatrix} C_0^0 Z_1 & C_0^1 Z_2 & \dots & C_0^{n-1} Z_n \\ 0 & C_1^1 Z_1 & \dots & C_1^{n-1} Z_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} Z_1 \end{bmatrix}, \quad (4.2.3a)$$

$$\xi^+ \equiv \begin{bmatrix} C_0^0 \xi_1^+ & C_0^1 \xi_2^+ & \dots & C_0^{n-1} \xi_n^+ \\ 0 & C_1^1 \xi_1^+ & \dots & C_1^{n-1} \xi_{n-1}^+ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \xi_1^+ \end{bmatrix}, \quad (4.2.3b)$$

$$\hat{\chi}^{-1}(\lambda_1) \equiv \begin{bmatrix} C_0^0 \chi^{-1}(\lambda_1) & C_0^1 \frac{d\chi}{d\lambda}|_{\lambda_1} & \dots & C_0^{n-1} \frac{d^{n-1}\chi^{-1}}{d\lambda^{n-1}}|_{\lambda_1} \\ 0 & C_1^1 \chi^{-1}(\lambda_1) & \dots & C_1^{n-1} \frac{d^{n-2}\chi^{-1}}{d\lambda^{n-2}}|_{\lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \chi^{-1}(\lambda_1) \end{bmatrix} \quad (4.2.3c)$$

et où $\eta, \mathbf{Y}^+, \hat{\chi}(\mu_1)$ sont définis similairement à $\mathbf{Z}, \xi^+, \hat{\chi}^{-1}(\lambda_1)$. Par hypothèse, les vecteurs Z_i et Y_i $i = 1, \dots, n$ sont non nuls. Ceci implique que les matrices rectangulaires \mathbf{Z} et \mathbf{Y}^+ sont de rang maximal et que les matrices carrées $(\mathbf{Z}^+\mathbf{Z})$ et $(\mathbf{Y}^+\mathbf{Y})$ sont non dégénérées. Le système défini par (4.2.1), (4.2.2) peut être simplifié en multipliant à gauche la première équation par $(\mathbf{Z}^+\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^+$ et en multipliant à droite la seconde équation par $\mathbf{Y}(\mathbf{Y}^+\mathbf{Y})^{-1}$. Les nouveaux systèmes sont donc

$$\xi^+\hat{\chi}^{-1}(\lambda_1) = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\hat{\chi}(\mu_1)\eta = 0 \quad (4.2.5)$$

Or, la matrice d'habillage $\chi^{-1}(\lambda_1)$ peut s'écrire:

$$\chi^{-1}(\lambda_1) = 1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\eta_i(\lambda_1 - \mu_1)^{i-n-1}}{(i-1)!(1-1)!} \dots \sum_{i=1}^1 \frac{\eta_i(\lambda_1 - \mu_1)^{i-1-1}}{(i-1)!(n-1)!} \right) \bar{\mathbf{Y}}^+ \quad (4.2.6)$$

où

$$\vec{Y}^+ = \begin{pmatrix} Y_1^+ \\ Y_2^+ \\ \vdots \\ Y_n^+ \end{pmatrix} \quad (4.2.7)$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{d^k \chi^{-1}}{d\lambda^k} |_{\lambda_1} &= (-1)^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{(n+k-i)! \eta_i (\lambda_1 - \mu_1)^{i-n-k-1}}{(i-1)!(1-1)!(n-i)!} \dots \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^1 \frac{(1+k-i)! \eta_i (\lambda_1 - \mu_1)^{i-1-k-1}}{(i-1)!(n-1)!(1-i)!} \right) \vec{Y}^+ \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Le système (4.2.4) combiné avec les expressions (4.2.6) et (4.2.8) est équivalent à :

$$\vec{\xi}^+ + \hat{\xi}^+ A(\lambda_1) \vec{Y}^+ = 0 \quad (4.2.9)$$

où $A(\lambda_1) = (a_{ij}(\lambda_1))$ avec

$$a_{ij}(\lambda_1) = \sum_{l=1}^{n-j+1} \frac{(n+i-j-l)! \eta_l (-1)^{i-1}}{(l-1)!(j-1)!(n-l-j+1)!(\lambda_1 - \mu_1)^{n+i-l-j+1}} \quad (4.2.10)$$

$$\vec{\xi}^+ = \begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \\ \vdots \\ \xi_n^+ \end{pmatrix} \quad (4.2.11)$$

et

$$\hat{\xi}^+ \equiv \begin{pmatrix} C_0^0 \xi_1^+ & 0 & \dots & 0 \\ C_0^1 \xi_2^+ & C_1^1 \xi_1^+ & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_0^{n-1} \xi_n^+ & C_1^{n-1} \xi_{n-1}^+ & \dots & C_{n-1}^{n-1} \xi_1^+ \end{pmatrix} \quad (4.2.12)$$

De la même façon, il faut exprimer la matrice d'habillage $\chi(\mu_1)$ sous une forme similaire à (4.2.6) et la substituer avec ses dérivées dans le système (4.2.5). Ce système devient ainsi:

$$\vec{\eta} + \vec{Z} B(\mu_1) \eta = 0 \quad (4.2.13)$$

où $B(\mu_1) = (b_{ij}(\mu_1))$ avec

$$b_{ij}(\mu_1) = \sum_{l=1}^{n-i+1} \frac{(n+j-i-l)! \xi_l^+ (-1)^{j-1}}{(l-1)!(i-1)!(n-l-i+1)!(\mu_1 - \lambda_1)^{n+j-l-i+1}}, \quad (4.2.14)$$

$$\vec{\eta} = (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n), \vec{Z} = (Z_1 Z_2 \dots Z_n), \quad (4.2.15)$$

et où

$$\eta = \begin{bmatrix} C_0^0 \eta_1 & C_0^1 \eta_2 & \dots & C_0^{n-1} \eta_n \\ 0 & C_1^1 \eta_1 & \dots & C_1^{n-1} \eta_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \eta_1 \end{bmatrix} \quad (4.2.16)$$

A partir de (4.2.9) et de (4.2.13), il est possible de séparer les différentes composantes et d'obtenir les solutions algébriques:

$$\vec{Y}^+ = -\Gamma^{-1} \vec{\xi}^+ \quad (4.2.17)$$

$$\vec{Z} = -\vec{\eta} \tilde{\Gamma}^{-1} \quad (4.2.18)$$

où

$$\Gamma \equiv \hat{\xi}^+ A(\lambda_1) \quad (4.2.19)$$

$$\tilde{\Gamma} \equiv B(\mu_1) \eta \quad (4.2.20)$$

Les matrices Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont des matrices carrées d'ordre n , non singulières et qui ne dépendent que des vecteurs indépendants $\xi_i, \eta_i \quad i = 1, \dots, n$. La résolution des équations différentielles, déterminant l'évolution dans le temps et l'espace de ces vecteurs colonnes, est effectuée à la section suivante.

4.3 Résolution des équations d'évolution.

L'habillage des matrices $U_0(\lambda)$ et $V_0(\lambda)$ du problème linéaire associé, défini au deuxième chapitre, donne les systèmes différentiels suivants:

$$\chi U_0(\lambda) + \chi_x = U(x, t, \lambda) \chi \quad (4.3.1a)$$

$$\chi V_0(\lambda) + \chi_t = V(x, t, \lambda) \chi \quad (4.3.1b)$$

$$U_0(\lambda) \chi^{-1} - \chi_x^{-1} = \chi^{-1} U(x, t, \lambda) \quad (4.3.2a)$$

$$V_0(\lambda)\chi^{-1} - \chi_t^{-1} = \chi^{-1}V(x, t, \lambda) \quad (4.3.2b)$$

où les systèmes (4.3.1) et (4.3.2) possèdent respectivement un pôle unique d'ordre n à λ_1 et à μ_1 . Pour dériver l'évolution des vecteurs colonnes, il suffit de substituer les décompositions (4.1.1) et (4.1.2) dans les systèmes ci-dessus et d'exiger l'égalité, de part et d'autre des équations, des parties principales des séries de Laurent développées autour de $\lambda = \lambda_1$ et $\lambda = \mu_1$. Le résultat prend la forme de deux systèmes de $2n$ équations résumés sous les formes factorisées suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\xi^+ \mathbf{U}_0(\lambda_1) + (\mathbf{Z}\xi^+)_x &= \mathbf{U}(x, t, \lambda_1)\mathbf{Z}\xi^+ \\ \mathbf{Z}\xi^+ \mathbf{V}_0(\lambda_1) + (\mathbf{Z}\xi^+)_t &= \mathbf{V}(x, t, \lambda_1)\mathbf{Z}\xi^+ \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(\mu_1)\eta \mathbf{Y}^+ - (\eta \mathbf{Y}^+)_x &= \eta \mathbf{Y}^+ \mathbf{U}(x, t, \mu_1) \\ \mathbf{V}_0(\mu_1)\eta \mathbf{Y}^+ - (\eta \mathbf{Y}^+)_t &= \eta \mathbf{Y}^+ \mathbf{V}(x, t, \mu_1) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

où les matrices $\mathbf{Z}, \xi^+, \eta, \mathbf{Y}^+$ ont été définies à la section 4.2 tandis que

$$\mathbf{U}_0 \equiv \begin{bmatrix} C_0^0 U_0 & C_0^1 \frac{dU_0}{d\lambda} & \dots & C_0^{n-1} \frac{d^{n-1}U_0}{d\lambda^{n-1}} \\ 0 & C_1^1 U_0 & \dots & C_1^{n-1} \frac{d^{n-2}U_0}{d\lambda^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} U_0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.5a)$$

$$\mathbf{V}_0 \equiv \begin{bmatrix} C_0^0 V_0 & C_0^1 \frac{dV_0}{d\lambda} & \dots & C_0^{n-1} \frac{d^{n-1}V_0}{d\lambda^{n-1}} \\ 0 & C_1^1 V_0 & \dots & C_1^{n-1} \frac{d^{n-2}V_0}{d\lambda^{n-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} V_0 \end{bmatrix}, \quad (4.3.5b)$$

avec \mathbf{U} et \mathbf{V} définis similairement. Le fait que \mathbf{Z} et \mathbf{Y}^+ soient de rang maximal permet de réécrire les systèmes (4.3.3) et (4.3.4) de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \xi_x + \mathbf{U}_0^+(\lambda_1)\xi &= \xi(\mathbf{Z}^+ \mathbf{U}^+(\lambda_1) - \mathbf{Z}_x^+) \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^+ \mathbf{Z})^{-1} \\ \xi_t + \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)\xi &= \xi(\mathbf{Z}^+ \mathbf{V}^+(\lambda_1) - \mathbf{Z}_t^+) \mathbf{Z}(\mathbf{Z}^+ \mathbf{Z})^{-1} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned} \eta_x - \mathbf{U}_0(\mu_1)\eta &= -\eta(\mathbf{Y}_x^+ + \mathbf{Y}^+ \mathbf{U}(\mu_1)) \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^+ \mathbf{Y})^{-1} \\ \eta_t - \mathbf{V}_0(\mu_1)\eta &= -\eta(\mathbf{Y}_t^+ + \mathbf{Y}^+ \mathbf{V}(\mu_1)) \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^+ \mathbf{Y})^{-1} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Des changements de bases de la forme

$$\begin{aligned}\xi &\rightarrow \xi(G_1^t)^+, & \mathbf{Z} &\rightarrow \mathbf{Z}(G_1^t)^{-1} \\ \eta &\rightarrow \eta(G_2^t)^+, & \mathbf{Y} &\rightarrow \mathbf{Y}(G_2^t)^{-1}\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

où $G_1(x, t)$ et $G_2(x, t)$ sont données par (4.1.6) permettent d'annuler les membres de droite des systèmes (4.3.6) et (4.3.7).

L'existence de telles transformations est garantie par la compatibilité des équations désirées:

$$\begin{aligned}\xi_x + \mathbf{U}_0^+(\lambda_1)\xi &= 0 \\ \xi_t + \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)\xi &= 0\end{aligned}\quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned}\eta_x - \mathbf{U}_0(\mu_1)\eta &= 0 \\ \eta_t - \mathbf{V}_0(\mu_1)\eta &= 0\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

En effet,

$$\xi_{xt} = \xi_{tx} \iff [\mathbf{V}_0(\lambda_1), \mathbf{U}_0(\lambda_1)] = 0 \quad (4.3.11)$$

$$\eta_{xt} = \eta_{tx} \iff [\mathbf{V}_0(\mu_1), \mathbf{U}_0(\mu_1)] = 0 \quad (4.3.12)$$

où

$$[\mathbf{V}_0, \mathbf{U}_0] = \begin{bmatrix} C_0^0[V_0, U_0] & C_0^1 \frac{d}{d\lambda}[V_0, U_0] & \dots & C_0^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}[V_0, U_0] \\ 0 & C_1^1[V_0, U_0] & \dots & C_1^{n-1} \frac{d^{n-2}}{d\lambda^{n-2}}[V_0, U_0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1}[V_0, U_0] \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

La compatibilité des systèmes (4.3.9) et (4.3.10) est donc assurée puisque $U_0(\lambda)$ et $V_0(\lambda)$ ont été choisis de manière à ce que le crochet $[U_0(\lambda), V_0(\lambda)]$ s'annule pour toute valeur de λ .

L'intégration des systèmes (4.3.9) et (4.3.10) donne les évolutions:

$$\hat{\xi}(x, t) = \exp(-\mathbf{U}_0^+(\lambda_1)x - \mathbf{V}_0^+(\lambda_1)t)\hat{\xi}_0, \quad (4.3.14)$$

$$\eta(x, t) = \exp(\mathbf{U}_0(\mu_1)x + \mathbf{V}_0(\mu_1)t)\eta_0 \quad (4.3.15)$$

où

$$\hat{\xi}_0 \equiv \begin{bmatrix} C_0^0 \xi_{1,0} & 0 & \dots & 0 \\ C_0^1 \xi_{2,0} & C_1^1 \xi_{1,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_0^{n-1} \xi_{n,0} & C_1^{n-1} \xi_{n-1,0} & \dots & C_{n-1}^{n-1} \xi_{1,0} \end{bmatrix} \quad (4.3.16a)$$

et

$$\eta_0 \equiv \begin{bmatrix} C_0^0 \eta_{1,0} & C_0^1 \eta_{2,0} & \dots & C_0^{n-1} \eta_{n,0} \\ 0 & C_1^1 \eta_{1,0} & \dots & C_1^{n-1} \eta_{n-1,0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \eta_{1,0} \end{bmatrix} \quad (4.3.16b)$$

sont des matrices complexes arbitraires constantes tandis que $\hat{\xi}(x, t)$ et $\eta(x, t)$ sont définis respectivement par les équations (4.2.12) et (4.2.16).

Soit

$$\begin{aligned} \xi_i(x, t) &\equiv \begin{pmatrix} \gamma_i(x, t) \\ \delta_i(x, t) \end{pmatrix} \\ \xi_{i,0} &\equiv \begin{pmatrix} \gamma_{i,0} \\ \delta_{i,0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

où $\gamma_i(x, t), \delta_i(x, t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ sont des fonctions scalaires tandis que $\gamma_{i,0}, \delta_{i,0}$ $i = 1, \dots, n$ sont des nombres complexes arbitraires. L'évolution des fonctions scalaires est déterminée en substituant les définitions (4.3.17) et les définitions de $\mathbf{U}_0(\lambda_1), \mathbf{V}_0(\lambda_1)$ dans l'équation (4.3.14). Il en résulte les expressions suivantes:

$$\gamma_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \frac{P_{k-1}^- \gamma_{i-k+1,0} (i-1)!}{(i-k)!(k-1)!}, \quad (4.3.18)$$

$$\delta_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \frac{P_{k-1}^+ \delta_{i-k+1,0} (i-1)!}{(i-k)!(k-1)!} \quad (4.3.19)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

avec les définitions:

$$P_j^- = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{j+2}{2} \rfloor} \frac{j! (-ib)^{j-2k+2} (it)^{k-1} e^{-i\bar{\lambda}_1 a}}{(j-2k+2)!(k-1)! 2^{k-1}}, \quad (4.3.20)$$

$$P_j^+ = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{j+2}{2} \rfloor} \frac{j!(ib)^{j-2k+2}(-it)^{k-1}e^{i\bar{\lambda}_1 a}}{(j-2k+2)!(k-1)!2^{k-1}}, \quad (4.3.21)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$P_0^- = e^{-i\bar{\lambda}_1 a}, \quad (4.3.22)$$

$$P_0^+ = e^{i\bar{\lambda}_1 a}, \quad (4.3.23)$$

$$a = \frac{1}{2}(x - \bar{\lambda}_1 t), b = \left(\frac{x}{2} - \bar{\lambda}_1 t\right) \quad (4.3.24)$$

où $\lfloor \frac{j+2}{2} \rfloor$ représente la partie entière de $\frac{j+2}{2}$.

L'ensemble des équations (4.3.18) \rightarrow (4.3.24) et des équations (4.2.19), (4.2.20) résoud le problème de Riemann "trivial" singulier avec des zéros d'ordre n . Il est superflu de calculer explicitement l'évolution des vecteurs $\eta_i, i = 1, \dots, n$ puisque la relation d'involution (2.4.18) relie les deux matrices d'habillage.

La section suivante donne la forme explicite des "solitons d'ordre supérieur" de l'équation de Schrödinger non linéaire avec quelques graphiques.

4.4 Solitons d'ordre supérieur et formule analytique.

Le calcul de la fonction soliton d'ordre supérieur est semblable à celui des sections 2.5.3 et 3.4. La propriété d'involution de la matrice $\chi(x, t, \lambda)$:

$$\chi^{-1}(x, t, \bar{\lambda}) = \tau \chi^+(x, t, \lambda) \tau \quad (4.4.1)$$

où

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

entraîne les relations suivantes:

$$\mu_1 = \bar{\lambda}_1, \quad (4.4.3)$$

$$\eta_j(x, t) = \begin{pmatrix} \gamma_j(x, t) \\ -\epsilon \delta_j(x, t) \end{pmatrix}, \quad (4.4.4)$$

$$Y_j(x, t) = \begin{pmatrix} \rho_j(x, t) \\ -\epsilon\phi_j(x, t) \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

où

$$Z_j(x, t) \equiv \begin{pmatrix} \rho_j(x, t) \\ \phi_j(x, t) \end{pmatrix} \quad (4.4.6)$$

pour $j = 1, 2, \dots, n$.

La fonction $\psi(x, t)$, solution de l'équation de Schrödinger non linéaire, s'obtient à partir de la définition de la matrice $U(x, t, \lambda)$:

$$U(x, t, \lambda) = \chi U_0(\lambda) \chi^{-1} + \chi_x \chi^{-1} \quad (4.4.7)$$

où

$$\chi(x, t, \lambda) = 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{Z_{i-j+1} \xi_j^+}{(i-j)!(j-1)!(\lambda - \lambda_1)^{n-i+1}} \quad (4.4.8)$$

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) = 1 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\eta_{i-j+1} Y_j^+}{(i-j)!(j-1)!(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{n-i+1}}, \quad (4.4.9)$$

$$U(x, t, \lambda) = \sqrt{K} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\psi} \\ \psi & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4.10)$$

et

$$U_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4.11)$$

Les développements en puissance:

$$\chi(x, t, \lambda) = 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{Z_{n-j+1} \xi_j^+}{(n-j)!(j-1)!} + \theta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (4.4.12)$$

et

$$\chi^{-1}(x, t, \lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{Z_{n-j+1} \xi_j^+}{(n-j)!(j-1)!} + \theta\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (4.4.13)$$

avec la relation (4.4.7) entraînent la fonction suivante

$$\psi(x, t) = \frac{-i}{\sqrt{K}} \sum_{j=1}^n \frac{\phi_{n-j+1} \bar{\gamma}_j}{(n-j)!(j-1)!} \quad (4.4.14)$$

Il ne reste qu'à dériver les formes explicites des fonctions $\phi_j(x, t)$ à partir de la relation (4.2.17). La règle de Kramer, appliquée au système:

$$\overline{\Gamma} \overrightarrow{\phi} = \epsilon \overrightarrow{\delta} \quad (4.4.15)$$

où

$$\overline{\Gamma}_{ij} = \sum_{k=1}^i \frac{(i-1)!}{(i-k)!(k-1)!} \sum_{l=1}^{n-j+1} \frac{(n+k-j-l)(-1)^{k-1}(\gamma_{i+1-k}\overline{\gamma}_l - \epsilon\delta_{i+1-k}\overline{\delta}_l)}{(l-1)!(j-1)!(n-l-j+1)!(\overline{\lambda}_1 - \lambda_1)^{n+k-l-j+1}} \quad (4.4.16)$$

$$\overrightarrow{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \quad (4.4.17)$$

et

$$\epsilon = \text{signe}(K) \quad (4.4.18)$$

donne finalement la fonction $\psi(x, t)$

$$\psi(x, t) = \frac{\epsilon i \det N}{\sqrt{K} \det(\overline{\Gamma})} \quad (4.4.19)$$

où N est une matrice de dimensions $(n+1) \times (n+1)$:

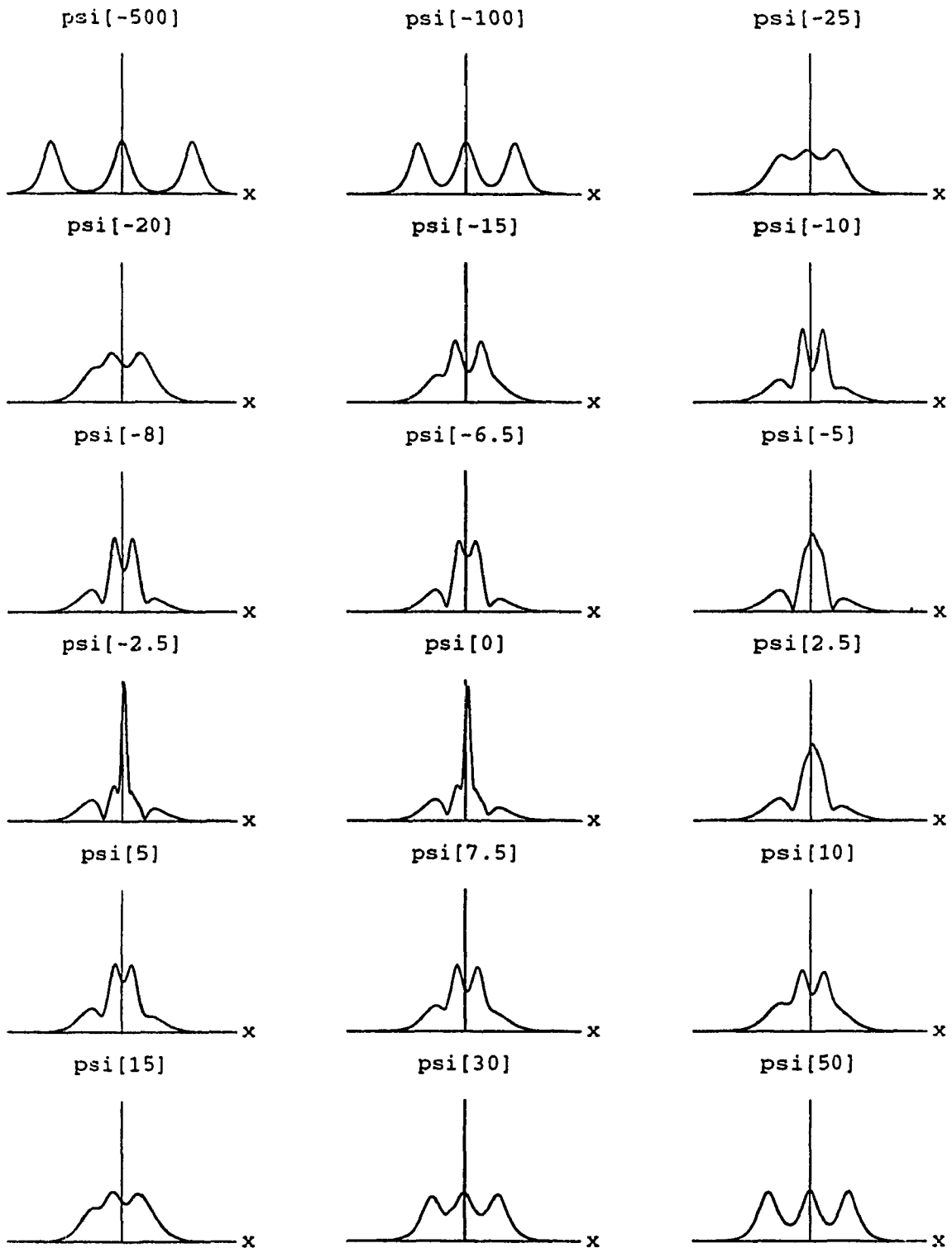
$$N = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{c}^t \\ \overrightarrow{\delta} & \overline{\Gamma} \end{pmatrix} \quad (4.4.20)$$

avec

$$\overrightarrow{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} \overline{\gamma}_n/(n-1)!(1-1)! \\ \cdots \cdots \\ \overline{\gamma}_i/(n-i)!(i-1)! \\ \cdots \cdots \\ \overline{\gamma}_1/(n-n)!(n-1)! \end{pmatrix} \quad (4.4.21)$$

En conclusion de ce chapitre, les graphiques des pages suivantes montrent l'évolution de solitons d'ordres trois et quatre en fonction du paramètre t , pour le cas $\epsilon = -1$.

Solitons de troisieme ordre



Graphique 4.1

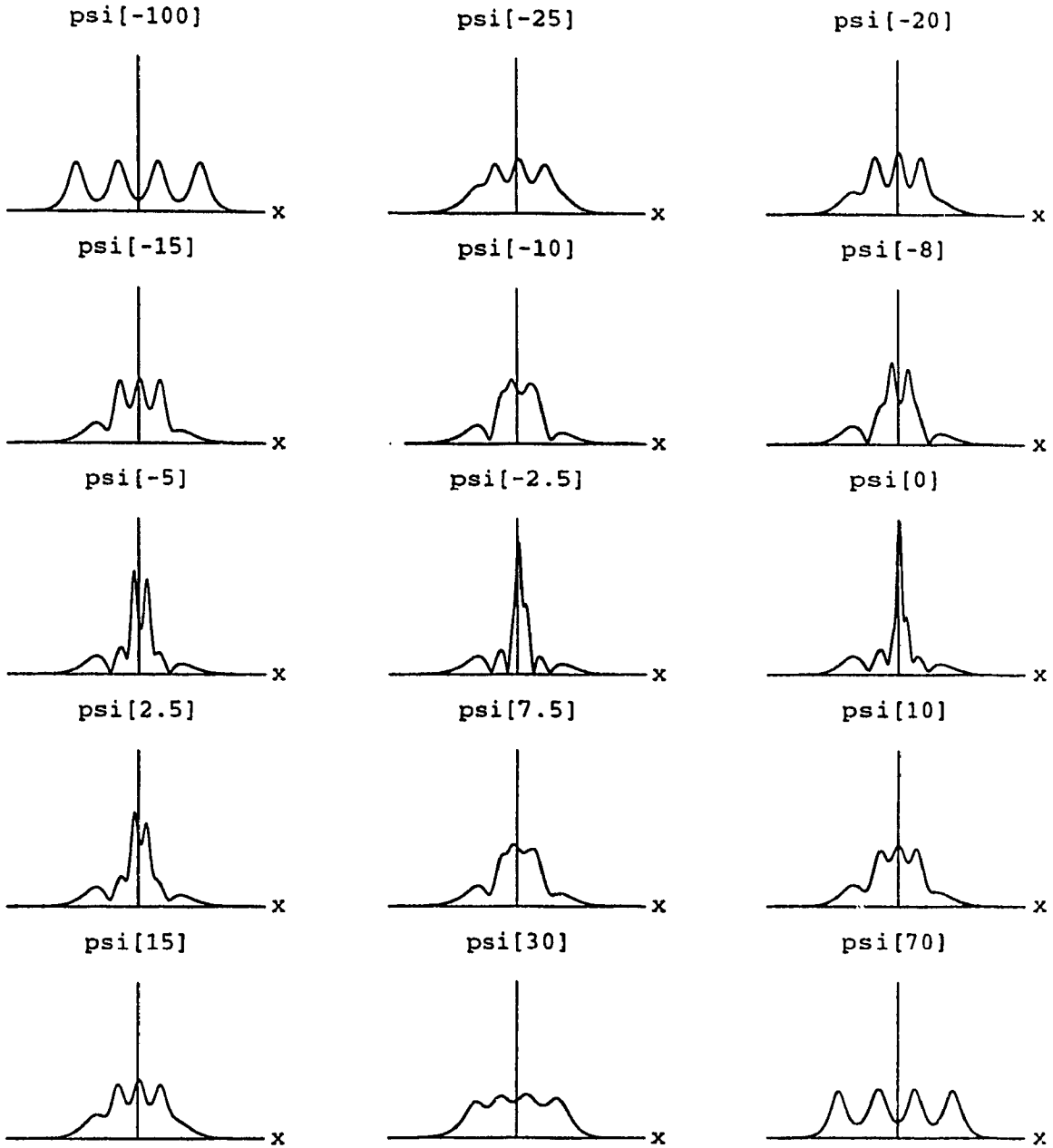
Notation: $\psii [t] = |\Psi(x,t)|$ Echelles: $x \rightarrow (-40,40)$ $\psii [t] \rightarrow (0,0.8)$

Paramètres: $\lambda_1 = 0.3I$

$$\gamma_{10} = 0.13 + 0.25I \quad \gamma_{20} = -0.34 + 0.15I \quad \gamma_{30} = 0.26 - 0.41I$$

$$\delta_{10} = -0.23 + 0.15I \quad \delta_{20} = 0.3 - 0.2I \quad \delta_{30} = 0.1 + 0.4I$$

Soliton de quatrieme ordre



Graphique 4.2

Notation: $\psi[t] = |\Psi(x,t)|$ Echelles: $x \rightarrow (-40,40)$ $\psi[t] \rightarrow (0,0.9)$

Paramètres: $\lambda_1 = 0.3I$

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &= 0.13 + 0.25I & \gamma_{20} &= -0.34 + 0.15I & \gamma_{30} &= 0.26 - 0.41I & \gamma_{40} &= -0.25 + 0.2I \\ \delta_{10} &= -0.23 + 0.15I & \delta_{20} &= 0.3 - 0.2I & \delta_{30} &= 0.1 + 0.4I & \delta_{40} &= -0.4 - 0.1I \end{aligned}$$

Conclusion

L'objectif principal de ce travail était d'introduire un nouveau type de soliton de l'équation de Schrödinger non linéaire. Je conclurai avec un résumé de quelques caractéristiques de cette onde non linéaire baptisée soliton d'ordre supérieur.

L'ordre correspond au nombre de "bosses asymptotiques" caractérisant la norme du soliton. Ces bosses sont toutes de même amplitude. L'analyse plus détaillée du soliton d'ordre deux montre l'existence d'un point central, animé d'une vitesse constante, par rapport auquel les maximums asymptotiques se déplacent dans des directions opposées avec des vitesses inversement proportionnelles au temps (les vitesses asymptotiques tendent donc vers celle du point central et la séparation entre les maximums asymptotiques est une fonction logarithmique en t). Ceci est à comparer avec la norme asymptotique d'un multi-solitons caractérisée par des bosses dont les amplitudes et les vitesses sont indépendantes et généralement différentes (ainsi, la séparation entre les bosses asymptotiques est une fonction croissante, linéaire en t).

Il faut mentionner que des solitons d'ordre supérieur existent pour d'autres systèmes complètement intégrables. Ces solitons peuvent s'obtenir de la méthode d'habillage à partir des équations générales de Zakharov et Shabat accompagnées des réductions appropriées.

Les solitons d'ordre supérieur présentent un intérêt en tant que nouveau type d'onde non linéaire stable. A ma connaissance, ces solitons n'ont pas encore été observés ou générés dans les fibres optiques.

Bibliographie

- [1] Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P. et V.E. Zakharov, *Theory of Solitons the Inverse Scattering Method*, A division of Plenum Publishing Corporation, 1984.
- [2] Faddeev L.D. et L.A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the theory of Solitons*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.
- [3] Zakharov V.E. et A.B. Shabat, *Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering*, II [English transl. *Funct. Anal. Appl.* 13, 166 (1979)].
- [4] Zakharov V.E. et A.V. Mikhailov, *On the integrability of Classical Spin-Models in Two-Dimensional Space-Time*, *Commun. Math. Phys.* 74, 21-40 (1980).
- [5] Govind P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, 1989.
- [6] Harnad J., Saint-Aubin Y. et S. Shnider, *The Soliton Correlation Matrix and the Reduction Problem for Integrable Systems*, *Commun. Math. Phys.* 93, 33-56 (1984).
- [7] G. Stoker, *Water waves*, Moscow, 1959.
- [8] Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D. et R.M. Miura, *Phys. Rev. Lett.* 19: 1095,(1967).