Actions localement analytiques et application aux représentations associées à des formes surconvergentes

Félix Houde

Mémoire présenté au
Département de Mathématiques et Statistique

Comme exigence partielle au grade maîtrise ès science (Mathématiques)
Université Concordia
Montréal, Québec, Canada

Juin 2025

UNIVERSITÉ CONCORDIA
École des études supérieures

Nous certifions par les présentes que le mémoire rédigé

par: **Félix Houde**
intitulé: **Actions localement analytiques et application aux représentations associées à des formes surconvergentes**

et déposé à titre d'exigence partielle en vue de l'obtention du grade de

maîtrise ès science (Mathématiques)

est conforme aux règlements de l'Université et satisfait aux normes établies pour ce qui est de l'originalité et de la qualité.
Signé par les membres du Comité de soutenance:

____________________ Président
Dr. Carlo Pagano

____________________ Examinateur
Dr. Adrian Ioviță

____________________ Directeur
Dr. Vincent Pilloni

____________________ Co-directeur
Dr. Giovanni Rosso

Approuvé par: ____________________
Dr. Marco Bertola, Directeur
Département de Mathématiques et Statistique

__________ 2025 ____________________
Dr. Pascale Sicotte, Doyenne
Faculté des Arts et Sciences

Résumé

Actions localement analytiques et application aux représentations associées à des formes surconvergentes

Félix Houde

L'objectif de ce mémoire est d'expliquer la preuve d'un théorème de Pan selon lequel les poids de Hodge-Tate-Sen d'une représentation associée à une forme modulaire p-adique surconvergente de poids k sont 0 et $k-1$. La preuve repose sur la notion d'action localement analytique d'un anneau sur un espace de Banach p-adique. On montre que l'action d'une certaine algèbre, appelée algèbre de Hecke, sur certains espaces de formes modulaires surconvergentes est localement analytique. Cela nous permet de déduire les poids de Hodge-Tate-Sen des représentations associées aux formes surconvergentes d'un résultat de Faltings sur les poids pour les représentations associées à des formes modulaires classiques. L'outil principal de la démonstration est la construction des faux invariants de Hasse par Scholze, dont l'existence suit de sa construction des courbes modulaires perfectoïdes et des morphismes de périodes de Hodge-Tate. Les faux invariants de Hasse commutent avec l'action de l'algèbre de Hecke et nous permettent de réduire l'étude de certains espaces de formes modulaires surconvergentes à l'étude d'espaces de formes modulaires classique.

Remerciements

Je veux d'abord remercier mon superviseur Vincent Pilloni d'avoir accepté de me prendre comme étudiant et de m'avoir beaucoup supporté durant la rédaction de ce mémoire.

Ce mémoire a été rédigé dans le cadre du programme de maîtrise international ALGANT. Celui-ci m'a permis de réaliser ma première année de maîtrise à l'Université Concordia, et ma deuxième à l'Université Paris-Saclay. Je suis reconnaissant envers les organisateurs du programme de m'avoir permis de vivre cette expérience. Je souhaite remercier particulièrement Giovanni Rosso et Kevin Destagnol, qui m'ont guidé durant tout le processus. Je tiens aussi à remercier Dimitris Koukoulopoulos de m'avoir supporté durant les dernières années.

Enfin, je veux remercier les Fonds de recherches du Québec (FRQ) - Secteur Nature et technologies et la Fondation Mathématique Jacques Hadamard (FMJH) pour leur soutien financier. Durant l'année 2023-2024, j'ai bénéficié d'une bourse de maîtrise en recherche des FRQ, et durant l'année 2024-2025, j'ai bénéficié d'une bourse de la FMJH ainsi que d'une bourse Frontenac des FRQ. Ce soutien financier a été essentiel à la poursuite de mes études aux cycles supérieurs.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Un objectif central de la théorie algébrique des nombres est de comprendre les extensions algébriques de $\mathbb{Q}$. Par la théorie de Galois pour les extensions infinies, cela revient à comprendre la structure de groupe topologique du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, le groupe des automorphismes de corps de $\overline{\mathbb{Q}}$. En effet, on peut munir $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de la topologie de Krull, induite par l'isomorphisme d'anneau

$$G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \lim_{K/\mathbb{Q} \text{ finie et galoisienne}} \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}),$$

où le morphisme $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est le morphisme surjectif de restriction $\sigma \longmapsto \sigma|_K$, et où on munit chaque $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ de la topologie discrète. Alors, par le théorème fondamental de la théorie de Galois, les extensions algébriques $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ sont en bijection avec les sous-groupes fermés de $G_{\mathbb{Q}}$.

Pour tenter de comprendre la structure d'un groupe, on étudie typiquement ses représentations, soit ses actions à gauche par des applications linéaires sur des espaces vectoriels (ou des modules). Dans ce qui suit, on s'intéresse principalement aux représentations de dimension finie. Comme on veut obtenir de l'information sur $G_{\mathbb{Q}}$ non seulement comme groupe abstrait, mais comme groupe topologique, on étudie plus précisément les représentations qui sont continues.

Définition 1.0.1. Soit A un anneau topologique et G un groupe topologique. Une représentation continue de dimension d de G sur un A est une représentation de G sur un A-module libre M de rang d, telle que le morphisme de groupes correspondant $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_A(M)$ est continu. Ici, en choisissant une base de M, on peut voir $\mathrm{Aut}_A(M)$ comme le groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans A, que l'on munit de la topologie de sous-espace pour l'injection $\mathrm{Aut}_A(M) \longrightarrow A^{n^2} \times A$ envoyant une matrice $(a_{i,j})_{i,j}$ sur $((a_{i,j})_{i,j}, \det(a_{i,j})_{i,j}^{-1})$.

Dans ce mémoire, on s'intéresse surtout au cas où $A = F$ est un corps, et spécialement une extension complète du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques. Une représentation de dimension 1 sur F correspond à un morphisme de groupes continu $G \longrightarrow F^{\times}$, appelé un caractère continu de G à valeurs dans F.

Exemple 1.0.2. L'exemple de base d'un caractère continu de $G_{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$ est celui du caractère cyclotomique $\chi_{\mathrm{cycl},p} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$, que l'on construit de la façon suivante : Le groupe $G_{\mathbb{Q}}$ agit de façon transitive sur les racines primitives n-ièmes de l'unité. En fait, si ζ_n est une telle racine primitive et $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, on a que $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{a_{\sigma,n}}$ pour un entier $a_{\sigma,n}$ compremier avec n, qui est unique modulo n. On a aussi que $a_{\sigma\sigma',n} \equiv a_{\sigma,n}a_{\sigma',n}$ pour tous $\sigma, \sigma' \in G_{\mathbb{Q}}$. Enfin, il est clair que $a_{\sigma,n} \bmod n$ ne dépend pas du choix de racine primitive de l'unité ζ_n, et que $a_{\sigma,n} \equiv a_{\sigma,m} \bmod n$ pour m un multiple de n. Ainsi, on a des morphismes de groupes

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}} &\longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \\ \sigma &\longmapsto a_{\sigma,n} \bmod n \end{aligned}$$

et, en spécialisant au cas $n = p^k$ pour $k \geq 1$, ceux-ci induisent un morphisme de groupes

$$\chi_{\mathrm{cycl},p} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \lim_{k} (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times.$$

Ce dernier est continu. En effet, comme c'est un morphisme de groupe, il suffit de montrer que la préimage de chacune des ouverts $1+p^k\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_p^\times$, qui forment une base de voisinages ouverts en 1, est un ouvert de $G_{\mathbb{Q}}$. Or, par définition, la préimage de $1+p^k\mathbb{Z}_p$ coïncide avec la préimage de l'ouvert $\{\mathrm{id}\} \subseteq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^k})/\mathbb{Q})$ dans $G_{\mathbb{Q}}$, donc c'est un ouvert.

En plus d'étudier les représentations continues de $G_{\mathbb{Q}}$, un objectif relié est d'étudier, pour les différents nombres premiers p, les représentations continues du groupe de Galois absolu $G_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, le groupe des automorphismes de corps de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui fixent les éléments de $\mathbb{Q}_p$. On peut aussi le munir de la topologie de Krull. Celui-ci se plonge de façon continue dans $G_{\mathbb{Q}}$, de façon non canonique. Une façon de le voir est que via l'inclusion $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_p \subseteq \overline{\mathbb{Q}_p}$, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ s'identifie à la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Cette identification de $\overline{\mathbb{Q}}$ avec la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est bien définie à précomposition avec un élément de $G_{\mathbb{Q}}$ près. Pour chaque tel plongement, l'application de restriction

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}_p} &\longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \\ \sigma &\longmapsto \sigma|_{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

est injective, et les applications obtenues pour les différents choix de plongements diffèrent par conjugaison par des éléments de $G_{\mathbb{Q}}$. Ce morphisme de groupe est continue, par commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} G_{\mathbb{Q}_p} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(K'/\mathbb{Q}_p) \arrow[d] \\ G_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches dénotent les restrictions appropriées, $K/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne finie, et $K'/\mathbb{Q}_p$ est l'extension galoisienne finie engendrée sur $\mathbb{Q}_p$ par n'importe quelle $\mathbb{Q}$-base de K. L'image de n'importe laquelle de ces applications $G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow G_{\mathbb{Q}}$ est appelée un sous-groupe de décomposition pour p, et est notée D_p. Par restriction à D_p, toute représentation continue de $G_{\mathbb{Q}}$ induit une représentation continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$, dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de plongement.

On définit une forme modulaire classique de poids k et de niveau $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, pour Γ un sous-groupe bien choisi, comme une section globale de $\omega_\Gamma^{\otimes k}$, où ω_Γ est un faisceau inversible sur une certaine courbe algébrique propre $X(\Gamma)_{\mathbb{C}}$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$, appelée courbe modulaire compactifiée de niveau Γ, et ω_Γ est un faisceau inversible naturel sur celle-ci. L'espace formé par les formes modulaires de poids et de niveau fixé est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, et admet une action par une certaine algèbre commutative, appelée algèbre de Hecke sphérique (qui dépend du niveau). Les opérateurs associés aux éléments de cette algèbre sont simultanément diagonalisable, et à leurs vecteurs propres communs, appelés formes propres classiques, on peut associer, pour tout p en dehors d'un ensemble fini, une certaine représentation continue de $G_{\mathbb{Q}}$ de dimension 2 sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On peut définir aussi une notion généralisée de formes modulaires, appelées les formes modulaires p-adiques surconvergentes, qui forment un espace de Banach. Elles ont, elles aussi, une notion de niveau et de poids. On a encore une action d'une algèbre commutative et, à certains vecteurs propres communs pour l'action de ses éléments (appelés formes propres surconvergentes), on peut associer une représentation continue de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}}$ sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ pour tous les nombres premiers p en dehors d'un ensemble fini. Ces notions sont expliquées de façon plus précise dans les sections 2.3, 2.6 et 2.7.

Un invariant important d'une représentation de dimension d de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ est ses poids de Hodge-Tate-Sen, qui sont, au signe près, les racines d'un polynôme unitaire canonique de degré d à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (cf. section 2.8 pour la définition). À la représentation de $G_{\mathbb{Q}}$ associée à une forme propre surconvergente, on peut associer une représentation continue de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}_p}$ par restriction à un groupe de décomposition, dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix du sous-groupe de décomposition. On peut donc associer à cette représentation des poids de Hodge-Tate-Sen. L'objectif du présent mémoire est d'expliquer la preuve du théorème suivant, telle qu'on peut la retrouver dans [Pan25].

Théorème 1.0.3 ([Pan25, Theorem 1.1])**.** *Les poids de Hodge-Tate-Sen de la représentation de dimension 2 associée à une forme propre surconvergente de poids $k \in \mathbb{Z}$ sont* $0, k-1$.

On peut voir ce résultat comme une extension de [Fal87], qui permet de déduire que la représentation associée à une forme modulaire classique de niveau k a aussi pour poids de Hodge-Tate-Sen 0 et $k-1$. La méthode de preuve consiste à introduire la notion d'action localement analytique d'une algèbre (pas forcément commutative) sur un espace de Banach p-adique. On montre que l'action naturelle de l'algèbre de Hecke sur un sous-espace de l'espace des formes modulaires p-adiques surconvergentes est localement analytique. Cela nous permet de construire une certaine algèbre de Banach qui, dans un certain sens, paramétrise les représentations associés aux formes surconvergentes, et on s'en sert pour déduire le théorème 1.0.3 du cas particulier des formes modulaires classiques.

1.1 Structure du mémoire

Dans le chapitre 2, on explique plusieurs notions et résultats préliminaires qui sont importants pour comprendre l'énoncé et la preuve du théorème 1.0.3. L'explication de la preuve en elle-même est contenue dans les chapitres 3 et 4. Dans le chapitre 3, on explique la notion d'action localement analytique introduite par Pan dans [Pan25], ainsi que sa démonstration du fait que l'action naturelle de l'algèbre de Hecke sur un espace de Banach de formes modulaires surconvergentes satisfait cette définition. Enfin, dans le chapitre 4, on explique comment en déduire le théorème 1.0.3.

Chapitre 2

Notions préliminaires

2.1 Espaces et algèbres de Banach p-adiques

Dans cette section, on rappelle certaines notions d'analyse p-adique, qui apparaissent dans ce qui suit.

Définition 2.1.1. Soit K un corps. Une valeur absolue sur K est une fonction $|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $|a| = 0$ si et seulement si $a = 0$.

(2) $|ab| = |a||b|$ pour tous $a, b \in K$.

(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ pour tous $a, b \in K$.

Si, en plus, on a l'inégalité (3)' $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$ pour tous $a, b \in K$, on dit que $|\cdot|$ est ultramétrique ou non archimédienne. Si K muni de la distance $d(a, b) := |a - b|$ est un espace métrique complet, on dit que K est complet. Si $|\cdot|$ est une valeur absolue non archimédienne par rapport à laquelle K est complet, on dit que K est un corps non archimédien.

Pour la suite, on suppose que $|\cdot|$ est non archimédienne et non triviale (elle ne prend pas seulement les valeurs 0 et 1). Pour un corps K muni d'une valeur absolue, on peut définir la notion d'espace de Banach.

Définition 2.1.2. Soit K un corps muni d'une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$. Soit V un K-espace vectoriel. Une norme (non archimédienne) sur V est une fonction $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui possède les propriétés suivantes :

(1) $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$.

(2) $\|av\| = |a|\|v\|$ pour tous $a \in K$, $v \in V$.

(3) $\|v + w\| \leq \max\{\|v\|, \|w\|\}$ pour tous $v, w \in V$.

Une paire $(V, \|\cdot\|)$ est appelée un espace normé sur K. Si V muni de la distance $d(x, y) = \|x - y\|$ est un espace métrique complet, on dit que V est un espace de Banach sur K.

Un résultat classique est que pour K un corps non archimédien, toutes les normes sur un espace de dimension finie sur K sont équivalentes (*i.e.*, elle induisent la même topologie). En particulier, tous les espaces vectoriels normés de dimension fini sur K sont des espaces de Banach. Le cas qui nous intéresse particulièrement est celui de $\mathbb{Q}_p$ et ses extensions. On peut montrer que toute extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (appelée un corps p-adique) admet une unique extension de la valeur absolue de $\mathbb{Q}_p$ (normalisée de sorte que $|p| = 1/p$), et donc toute extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$ admet une unique valeur absolue étendant celle sur $\mathbb{Q}_p$. Toute extension finie de $\mathbb{Q}_p$ est donc naturellement un $\mathbb{Q}_p$-espace de Banach (ou espace de Banach p-adique). Les extensions de $\mathbb{Q}_p$ qui sont les plus importantes pour nous sont les extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et sa complétion $\mathbb{C}_p$ (qui est aussi algébriquement close), et $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ (le corps obtenu en adjoignant toutes les p^n-racines de l'unité pour $n \geq 1$) et sa complétion $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$.

Pour tout corps K muni d'une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$, la boule unité fermée $\{x \in K : |x| \leq 1\}$ est un sous-anneau ouvert-fermé de K, que l'on note $\mathcal{O}_K$. C'est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_K = \{x \in \mathcal{O}_K : |x| < 1\}$. Par exemple, $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}_p$, et $\mathfrak{m}_{\mathbb{Q}_p} = p\mathbb{Z}_p$. Pour toute extension finie K de $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{m}_K$ est principal, et engendré par n'importe quel élément $\pi \in \mathfrak{m}_K$ de valeur absolue maximale. Tout tel π est appelé un uniformisateur.

Pour la suite, on a besoin de la notion de réseau dans un espace de Banach sur un corps non archimédien.

Définition 2.1.3. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur un corps non archimédien K. Un réseau dans V est un $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{L} \subseteq V$ tel que pour tout $v \in V$, il existe un scalaire $a \in K^\times$ tel que $av \in \mathcal{L}$.

Les exemples de base de réseaux sont les boules fermées et ouvertes centrées en l'origine.

Certains espaces de Banach que nous considérons ont une structure d'algèbre compatible avec leur norme.

Définition 2.1.4. Soit K un corps non archimédien, et soit A une K-algèbre (pas forcément commutative) munie d'une norme non archimédienne $\|\cdot\|$ qui vérifie $\|1\| = 1$ et $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Si $(A, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, on appelle A une K-algèbre de Banach.

Il suit de la définition qu'une algèbre de Banach possède une structure d'anneau topologique naturelle. Pour K un corps non archimédien, toute extension L/K munie d'une extension de la valeur absolue sur K est une K-algèbre de Banach. Aussi, pour $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K, l'ensemble $\mathrm{End}_{K,\mathrm{cts}}(V)$ des endomorphismes bornés (ou, de façon équivalente, continus) de K-espaces vectoriels de V est une algèbre de Banach lorsque munie de la norme d'opérateur associée à la norme $\|\cdot\|$. D'autres exemples intéressants sont les anneaux de séries entières à coefficients bornés $\mathcal{O}_K[[X_1, \ldots, X_n]] \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ et les algèbres de Tate

$$K\langle X_1, \dots, X_n\rangle = \Big\{ \sum_{(i_1,\dots,i_n)} a_{(i_1,\dots,i_n)} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} : |a_{(i_1,\dots,i_n)}| \to 0 \Big\},$$

toutes deux munies de la norme de Gauss. On rappelle quelques résultats de base de la théorie des espaces et des algèbres de Banach.

Proposition 2.1.5. *Soit K un corps non archimédien.*

(1) *Pour V un espace de Banach sur K, tout sous-espace fermé V' de V est un espace de Banach lorsque muni de la restriction de la norme sur V, et la fonction $\|[v]\|_{V/V'} := \inf\{\|v + v'\| : v' \in V'\}$ définit une structure d'espace de Banach sur V/V'. On a que le passage au quotient $V \longrightarrow V/V'$ est continu.*

(2) *Si A est une algèbre de Banach, toute sous-algèbre fermé de A est une algèbre de Banach lorsque muni de la restriction de la norme sur A, et pour tout idéal fermé $I \subseteq A$, la norme définie en* (1) *donne à A/I une structure d'algèbre de Banach, et $A \longrightarrow A/I$ est continue.*

Les idéaux maximaux d'une algèbre de Banach sont toujours fermés.

Proposition 2.1.6. *Soit K un corps non archimédien, et A une K-algèbre de Banach. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, $\mathfrak{m}$ est fermé dans A.*

Démonstration. On note que l'adhérence d'un idéal est un idéal, par continuité de l'addition et de la multiplication. Ainsi, il suffit de vérifier que l'adhérence de $\mathfrak{m}$ ne contient pas 1. Or, si c'est le cas, il existe, en particulier, un élément $m \in \mathfrak{m}$ tel que $\|1 - m\| < 1$. On a alors que m est inversible, d'inverse donné par la série

$$\sum_{n \geq 0} (1 - m)^n.$$

Celle-ci est une suite de Cauchy (donc elle converge) car $\|1 - m\| < 1$ et par la propriété (3)' des valeurs absolues non archimédiennes. Or, un élément inversible d'une algèbre ne peut pas être contenu dans un idéal maximal.

□

Concentrons-nous maintenant sur le cas des algèbres de Tate. On note certaines de leurs propriétés importantes.

Lemme 2.1.7. *Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et soit $T_n = K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ une algèbre de Tate. On la munit de la norme de Gauss.*

(1) *T_n est noethérien.* [BGR84, 5.2.6, Theorem 1]

(2) *Tout idéal de I de T_n est fermé.* [BGR84, 5.2.7, Corollary 2]

(3) *T_n est un anneau de Jacobson.* [BGR84, 5.1.3, Proposition 3]

(4) *T_n est un anneau excellent (donc de Nagata).* [Mat70, Theorem 102]

(5) *Pour tout idéal maximal de T_n, $T_n/\mathfrak{m}$ est une extension finie de K (et donc de $\mathbb{Q}_p$).* [BGR84, 6.1.2, Corollary 3]

(6) *La norme de Gauss d'un élément $P \in T_n$ est égale au supremum sur les idéaux maximaux $\mathfrak{m} \subseteq T_n$ des valeurs de $|\overline{P}|$ pour $\overline{P}$ l'image de P dans $T_n/\mathfrak{m}$ et $|\cdot|$ l'unique extension de la valeur absolue sur $\mathbb{Q}_p$ à $T_n/\mathfrak{m}$.* [BGR84, 5.1.4, Corollary 6]

On définit une algèbre affinoïde sur K comme une algèbre de Banach (commutative) donnée par un quotient T_n/I pour un $n \geq 0$ et un idéal I de T_n, muni de la norme induite. Il suit du résultat précédent que toute algèbre affinoïde A est noethérienne, de Jacobson et vérifie que $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $A \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ est continu, et le supremum sur les idéaux maximaux des valeurs absolues des $[f] \in A/\mathfrak{m}$ est borné pour tout $f \in A$.

Remarque 2.1.8. Réciproquement, pour un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $A \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, l'image de A dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est une extension entière de $\mathbb{Q}_p$, donc c'est un corps isomorphe à $A/\mathfrak{m}$ pour $\mathfrak{m}$ un idéal maximal. Si A est une algèbre affinoïde, il suit que $A \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ se factorise par une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et le morphisme $A \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ est continu. Ainsi, pour une algèbre affinoïde, les morphismes de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $A \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ sont tous continus, ils se factorisent par une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et sont obtenus en composant un morphisme quotient $A \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ et un plongement de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $A/\mathfrak{m} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$.

En général, on peut ignorer la topologie lorsqu'on considère les morphismes entre des algèbres affinoïdes.

Théorème 2.1.9 ([BGR84, 6.1.3, Theorem 1])**.** *Tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $A \longrightarrow B$ entre des algèbres affinoïdes est continu.*

En particulier, cela implique que la topologie sur une algèbre affinoïde ne dépend pas du choix de présentation comme quotient d'une algèbre de Tate. La collection des algèbres affinoïdes est fermée sous plusieurs opérations.

Lemme 2.1.10. *Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.*

(1) *Un quotient d'une algèbre affinoïde sur K est une algèbre affinoïde sur K.*

(2) *Un produit fini d'algèbres affinoïdes sur K est une algèbre affinoïde sur K.*

(3) *Si $\mathcal{R}$ est une algèbre affinoïde sur K et $\mathcal{R}'$ est une $\mathcal{R}$-algèbre qui est de type fini comme $\mathcal{R}$-module, alors $\mathcal{R}'$ est une algèbre affinoïde sur K, et le morphisme de structure $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ est continu.*

Démonstration. L'assertion (1) est claire. Pour (2), il suffit de montrer qu'un produit fini d'algèbres de Tate est une algèbre affinoïde. Or, étant donné des $K\langle X_{i,1}, \ldots, X_{i,n_i}\rangle$, $i = 1, \ldots, m$, on a un isomorphisme

$$K\langle Y_{1,1}, \ldots, Y_{m,n_m}\rangle/I \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{m} K\langle X_{i,1}, \ldots, X_{i,n_i}\rangle$$
$$Y_{i,j} \longmapsto X_{i,j},$$

où I est l'idéal engendré par les $Y_{i,j}Y_{i',j'}$ avec $i \neq i'$. Enfin, pour (3), $\mathcal{R}'$ est un quotient d'un produit fini de copies de $\mathcal{R}$, donc c'est une algèbre affinoïde, par (1) et (2). Le morphisme $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ est continu par le théorème 2.1.9.

□

Remarque 2.1.11. Ici, on spécialise les résultats aux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, mais les résultats présentés sont vrais en plus grande généralité.

2.2 Groupes linéaires et adèles

Dans ce qui suit, on étudie les propriétés des groupes linéaires généraux $\mathrm{GL}_n(A)$ pour certains anneaux topologiques A.

D'abord, on s'intéresse au cas où $A = K$ est un corps p-adique. On peut voir $\mathrm{GL}_n(K)$ comme un sous-ensemble ouvert de l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans K, identifié à K^{n^2} de la façon habituelle, et le munir de la topologie de sous-espace. Cela fait de $\mathrm{GL}_n(K)$ un groupe topologique, c'est-à-dire un groupe muni d'une topologie pour laquelle la multiplication $G \times G \longrightarrow G$ et le passage à l'inverse $G \longrightarrow G$ sont continus. La continuité de la multiplication est claire car le produit de deux matrices est donné par des polynômes en chaque entrée, et on peut voir similairement que le passage à l'inverse est continu en considérant la description de l'inverse d'une matrice en fonction de la transposée de sa comatrice et de son déterminant.

Dans cette topologie, une base d'ouverts autour de l'identité est donnée par les sous-groupes

$$U_{K,m} = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K) : M \equiv I_n \bmod \mathfrak{m}_K^m\} \overset{m\geq 1}{=} \{I_n + P : P \in M_{n\times n}(\mathfrak{m}_K^m)\} \quad (2.2.1)$$

pour $m \geq 0$, où I_n désigne la matrice identité dans $\mathrm{GL}_n(K)$ et $M_{n\times n}(L)$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans L. En effet, pour la deuxième égalité, notons que la matrice $I_n + P$ est toujours inversible, d'inverse donnée par la série convergente $I_n + \sum_{\ell=1}(-1)^\ell P^\ell$. Ces sous-groupes sont ouverts dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$, et donc ils sont aussi fermés dans ce groupe. Cela suit du fait général qu'un sous-groupe ouvert U d'un groupe topologique G est fermé, comme il est le complément de l'union de ses translatés par des éléments de G n'appartenant pas à U. Le sous-groupe ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ est quasi-compact, et donc il en va de même pour tous les $U_{K,n}$. En effet, une façon rapide de le voir est de constater que, comme sous-ensemble de $M_{n\times n}(K)$, $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ s'identifie à l'intersection du compact $M_{n\times n}(\mathcal{O}_K)$ et du fermé $\{M \in M_{n\times n}(K) : |\det M| = 1\}$.

Le résultat suivant donne une décomposition matricielle très utile.

Lemme 2.2.2. *Soit K un corps p-adique. On a*

$$\mathrm{GL}_n(K) = \bigsqcup_{\substack{m_1\geq \ldots \geq m_n \\ m_i \in \mathbb{Z}}} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)\, \mathrm{diag}(\varpi^{m_1}, \ldots, \varpi^{m_n})\, \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$$

où ϖ est n'importe quel uniformisateur de K, et $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est la matrice diagonale $n \times n$ dont l'élément à la position (i, i) est λ_i.

Démonstration. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(K)$. Quitte à conjuguer par une matrice de permutation, on peut supposer que l'élément de la matrice de valeur absolue maximale est à la position (n, n). Quitte à multiplier par une matrice diagonale dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$, on peut supposer que l'élément à la position (n, n) est de la forme ϖ^{m_n} pour un entier m_n. Comme tout élément de la matrice obtenue est de valeur absolue supérieure à celle ϖ^{m_n}, tous les éléments de la ligne n et de la colonne n sont dans $\varpi^{m_n}\mathcal{O}_K$. Par élimination de Gauss, en multipliant à gauche et à droite par des matrices dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$, on obtient une matrice dont tous les éléments sur la ligne n et tous les éléments sur la colonne n sont nuls, sauf l'élément à la position (n, n), qui est ϖ^{m_n}. On poursuit par récurrence.

□

Le formalisme adélique permet de considérer de façon simultanée tous les groupes $\mathrm{GL}_n(L_\mathfrak{q})$ pour $L_\mathfrak{q}$ la complétion en un idéal maximal $\mathfrak{q}$ d'un corps de nombres L. Étant donné une collection de paires $(G_i, H_i)_{i\in I}$ d'un groupe topologique localement compact G_i et d'un sous-groupe ouvert et compact H_i, on définit le produit restreint des (G_i, H_i) comme le groupe donné par

$$\prod_{i\in I}{}' (G_i, H_i) = \{(g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i : g_i \in H_i \text{ pour tous les } i \text{ en dehors d'un ensemble fini}\}$$

muni du produit terme-à-terme. On peut définir une structure de groupe topologique sur le produit restreint en déclarant qu'une base de voisinages ouverts de l'élément neutre $(e_i)_{i\in I}$ est donnée par les produits de la forme $\prod_{i\in I} U_i$, où U_i est un voisinage ouvert de e_i dans U_i, et $U_i = H_i$ pour tous les i sauf un nombre fini. Dans notre cas, on définit

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L,f}) = \prod_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_L}{}' (\mathrm{GL}_n(L_\mathfrak{p}), \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{L_\mathfrak{p}})),$$

où Spm dénote l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}_L$ et $L_\mathfrak{p}$ la complétion $\mathfrak{p}$-adique de L, et pour S un ensemble fini d'idéaux maximaux de L, on définit

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f}) = \prod_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_L \setminus S}{}' (\mathrm{GL}_n(L_\mathfrak{p}), \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{L_\mathfrak{p}})).$$

Bien sûr, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L,f}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$ pour $S = \varnothing$. Dans ce qui suit, on s'intéresse principalement au cas $n = 2$ et $L = \mathbb{Q}$. On utilise les abréviations $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_f) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{\mathbb{Q},f})$ et, quand $S = \{(p)\}$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^p_f) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^{\{(p)\}}_{\mathbb{Q},f})$.

Remarque 2.2.3. En tant qu'ensemble, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$ est le groupe des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}^S_{L,f}$ des adèles finies en dehors de S, donné par le groupe topologique (additif)

$$\mathbb{A}_{L,f} = \prod_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_L \setminus S}{}' (L_\mathfrak{p}, \mathcal{O}_{L_\mathfrak{p}})$$

muni de la multiplication terme-à-terme, qui est continue pour cette topologie. Cependant, si on définit la topologie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$ par sa topologie de sous-espace dans $(\mathbb{A}^S_{L,f})^{n^2}$, le passage à l'inverse n'est pas continu. On retrouve la topologie donnée dans la construction précédente en considérant, par exemple, la topologie de sous-espace induite par

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f}) &\hookrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{A}^S_{L,f}) \times \mathbb{A}^S_{L,f} \\ M &\mapsto (M, \det M^{-1}), \end{aligned}$$

qui identifie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$ avec le sous ensemble $\{(M,a) \in M_{n\times n}(\mathbb{A}^S_{L,f}) \times \mathbb{A}^S_{L,f} : a \det M = 1\}$.

Le lemme 2.2.2 a une extension naturelle dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$.

Lemme 2.2.4. *Soit L un corps de nombre, et soit S un ensemble fini d'idéaux premiers. Choisissons un uniformisateur $\varpi_{\mathfrak{p}}$ de $L_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p} \notin S$. On a*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f}) = \bigsqcup_D \Big(\prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_L \setminus S} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{L_{\mathfrak{p}}}) \Big) D \Big(\prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} \mathcal{O}_L \setminus S} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{L_{\mathfrak{p}}}) \Big)$$

où l'union est sur l'ensemble des matrices de la forme $(D_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}(\mathcal{O}_L)\setminus S}$, où

$$D_{\mathfrak{p}} = \operatorname{diag}(\varpi_{\mathfrak{p}}^{m_{\mathfrak{p},1}}, \ldots, \varpi_{\mathfrak{p}}^{m_{\mathfrak{p},n}}),$$

et $m_{\mathfrak{p},1} \geq \ldots, \geq m_{\mathfrak{p},n}$ sont des entiers dont seulement un nombre fini est non nul.

2.3 Algèbres de Hecke

Il existe plusieurs façons de généraliser la notion d'opérateurs de Hecke qui apparaît dans la théorie usuelle des formes modulaires. Ici, on s'intéresse à la notion d'algèbre de Hecke d'un groupe localement profini et unimodulaire.

Définition 2.3.1. Un groupe topologique G est dit localement profini s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(1) L'élément neutre de G admet une base donnée par des sous-groupes ouverts et compacts.

(2) G est totalement disconnexe, de Hausdorff et localement compact.

Dans ce cas, tous les sous-groupes compacts de G sont profinis, *i.e.*, isomorphes comme groupes topologiques à une limite cofiltrée de groupes finis discrets.

Exemple 2.3.2. Voici quelques exemples importants de groupes localement profinis.

(1) Tout groupe profini est localement profini. En particulier, cela s'applique au groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ d'un corps K, où K^{sep} est la clôture séparable de K (c'est-à-dire sa clôture algébrique si K est parfait), muni de sa topologie de Krull.

(2) Les groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ pour K un corps p-adique, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L,f})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{L,f}^S)$ pour S un ensemble fini d'idéaux maximaux d'un corps de nombres L sont aussi localement profinis (cf. section 2.2). C'est à ce deuxième exemple qu'on s'intéresse plus particulièrement.

Un groupe localement profini est, par définition, localement compact. Ainsi, il admet une mesure μ sur sa σ-algèbre des boréliens qui est non nulle, finie sur tous les compacts, quasi-régulière et invariante par multiplication à gauche, c'est-à-dire que $\mu(gS) = \mu(S)$ pour tout $g \in G$ et tout borélien S. Cette mesure, appelée mesure de Haar, est unique à multiplication par un scalaire positif près.

Dans le cas des groupes localement profinis, on peut montrer l'existence et l'unicité (à constante près) de la mesure de Haar plutôt facilement. En effet, pour l'unicité, soit $K \subseteq G$ un sous-groupe ouvert et compact. On a alors que tout sous-groupe ouvert et compact C de K est d'indice fini, comme ses translatés forment un recouvrement ouvert disjoint de K, et donc, par invariance par translation, on a $\mu(K) = \mu(C)[K : C]$. Cela détermine la mesure de tout ouvert contenu dans K, et donc celle de tout ouvert U de G, en considérant sa décomposition en une union disjointe d'ouverts de la forme $gK \cap U$ et en sommant leur mesure, avec la convention qu'une somme sur un ensemble indénombrable est infinie si elle n'est pas supportée sur un ensemble dénombrable. Ainsi, par régularité extérieure, $\mu(E)$ est déterminée par $\mu(K)$ pour tout borélien E. On peut se servir de cette description pour montrer l'existence.

Une mesure de Haar peut ne pas être invariante à droite.

Définition 2.3.3. Un groupe topologique localement compact est unimodulaire si l'une de ses mesures de Haar (et donc toutes) est aussi invariante à droite.

Remarque 2.3.4. L'échec de l'unimodularité d'un groupe localement compact G est capturée par un caractère $\chi : G \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{C}^\times$. En effet, on a que pour tout $g \in G$, pour n'importe quel choix de mesure de Haar μ, l'application

$$B \longmapsto \mu(Bg)$$

est aussi une mesure de Haar, donc est de la forme $\chi(g)\mu$ pour un certain élément $\chi(g) \in \mathbb{R}_{>0}$. Notons qu'il existe un borélien (et même un compact) B tel que $\mu(B) \in (0, \infty)$. En effet, si tout compact est de mesure zéro, alors $\mu(G)$ est de mesure zéro par régularité intérieure, ce qui est une contradiction avec le fait que μ n'est pas nulle. On a donc, pour un tel B, et tous g, g',

$$\chi(gg')\mu(B) = \mu(Bgg') = \chi(g')\mu(Bg) = \chi(g)\chi(g')\mu(B),$$

et donc on conclut que χ est un caractère.

À l'aide de cette remarque, on peut montrer que les groupes de l'exemple 2.3.2 (2) sont unimodulaire. En effet, d'abord, si K est un corps p-adique, le lemme 2.2.2 implique qu'il suffit de montrer que le caractère χ tel que défini plus haut est trivial sur les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$, ainsi que sur les éléments de la forme $\mathrm{diag}(\varpi^{m_1}, \ldots, \varpi^{m_n})$ pour ϖ un uniformisateur et $m_1 \geq \ldots \geq m_n$ des entiers. Or, si $g \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$, notons que

$$\mu(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)) = \mu(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)g) = \chi(g)\mu(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)),$$

et donc, comme $\mu(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)) \neq 0$, on conclut que $\chi(g) = 1$. Ensuite, on a que

$$U_\ell := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K/\varpi) : M_{i,j} = 0 \text{ sauf peut-être pour } i = j \text{ et } i \leq \ell < j\}$$
$$L_\ell := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K/\varpi) : M_{i,j} = 0 \text{ sauf peut-être pour } i = j \text{ et } j \leq \ell < i\}$$

sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K/\varpi)$. Ainsi, leurs préimages respectives U'_ℓ et L'_ℓ dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ sont des sous-groupes (ouverts et compacts) normaux d'indice fini. Notons aussi que l'image par la transposition de U'_ℓ est L'_ℓ. Il s'ensuit que leurs indices dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$, et donc leurs mesures respectives, qui sont non nulles, sont les mêmes. Enfin, notons que pour $D_\ell = \mathrm{diag}\{\varpi, \ldots, \varpi, 0, \ldots, 0\}$, où les ℓ premiers termes sont des ϖ, on a

$$D_\ell U'_\ell D_\ell^{-1} = L'_\ell,$$

et donc

$$\mu(L'_\ell) = \mu(D_\ell U'_\ell D_\ell^{-1}) = \chi(D_\ell)^{-1}\mu(U'_\ell) = \chi(D_\ell)^{-1}\mu(L'_\ell),$$

ce qui permet de conclure que $\chi(D_\ell) = 1$ pour tout ℓ. Comme toute matrice de la forme

$$\mathrm{diag}(\varpi^{m_1}, \ldots, \varpi^{m_n})$$

pour ϖ un uniformisateur et $m_1 \geq \ldots \geq m_n$ des entiers s'écrit comme un produit de puissances des D_ℓ, on conclut que χ est le caractère trivial, et donc $\mathrm{GL}_n(K)$ est unimodulaire. Pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$ pour L un corps de nombres et S un ensemble fini de premiers, une preuve analogue basée sur le lemme 2.2.4 permet de montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$ est unimodulaire.

Aux groupes localement profinis et unimodulaires, on peut associer certaines algèbres, appelées algèbres de Hecke.

Définition 2.3.5. Soit G un groupe localement profini et unimodulaire et μ une mesure de Haar. On définit $C_c^\infty(G)$ comme l'ensemble des fonctions localement constantes et à support compact $G \longrightarrow \mathbb{C}$.

On munit $C_c^\infty(G)$ de la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel donnée par

$$(aF + bF')(g) = aF(g) + bF'(g)$$

pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $F, F' \in C_c^\infty(G)$ et $g \in G$. Il existe une représentation naturelle de G sur $C_c^\infty(G)$, donnée par $(g, F) \longmapsto F(g^{-1}-)$, et une représentation naturelle du groupe opposé G^{op}, donnée par $(g, F) \longmapsto F(-g^{-1})$. On munit aussi $C_c^\infty(G)$ de la convolution, définie par

$$F * F'(g) = \int F(h)F'(h^{-1}g)d\mu(h).$$

Remarque 2.3.6. Une fonction $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est localement constante si et seulement si pour tout $g \in G$, il existe un sous-groupe ouvert et compact H_g de G tel que $F(gh) = F(g)$ (respectivement $F(hg) = F(g)$) pour tout $h \in H_g$. En fait, quitte à prendre H_g plus petit, on peut supposer que $F(hgh') = F(gh') = F(hg)$ pour tous les $h, h' \in H_g$. Les gH_g pour $g \in G$ recouvrent G, dont, par compacité, $\operatorname{supp} F$ est recouvert par certains $g_1 H_{g_1}, \dots, g_n H_{g_n}$. En particulier, on a que $H = \bigcap_i H_{g_i}$ est un sous-groupe ouvert et compact de G tel que tout $g \in \operatorname{supp} F$ et tout $h \in H$, on a $F(hg) = F(g)$. Il suit que pour $g \notin \operatorname{supp}(F)$ et $h \in H$, on ne peut pas avoir $F(hg) \neq 0$. Ainsi, une fonction $F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ est localement constante si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert et compact H tel que $F(hg) = F(g)$ pour *tous* les $g \in G, h \in H$.

Si F, F' sont localement constantes et à support compact, le support de $F * F'$ est contenu dans le produit $\operatorname{supp}(F) \operatorname{supp}(F')$, qui est compact comme c'est l'image du compact $\operatorname{supp}(F) \times \operatorname{supp}(F')$ par la multiplication de G. De plus, par la remarque 2.3.6, pour tous $g, h \in G$, il existe un sous-groupe ouvert et compact G' de G tel que $F'(h^{-1}gg') = F'(h^{-1}g)$ pour tout $g' \in G'$. En fait, il existe un voisinage ouvert V de l'identité pour lequel $F'(h^{-1}gg') = F(h^{-1}g)$ pour tout $g' \in G'$ et tout $h \in V$. Ces voisinages pour les différents h dans le support de F donnent un recouvrement ouvert de $\operatorname{supp}(F)$, duquel on peut extraire un sous-recouvrement fini. Par conséquent, quitte à prendre G' plus petit, on a que $F'(h^{-1}gg') = F'(h^{-1}g)$ pour tous les $h \in \operatorname{supp} F$ et tous les $g' \in G'$, et il suit que $F * F'(gg') = F * F'(g)$, et donc $F * F'$ est localement constante.

La construction de la convolution se généralise en une action de $C_c^\infty(G)$ sur toute représentation lisse de G.

Définition 2.3.7. Soit K un corps. Une représentation ρ d'un groupe topologique G sur un K-espace vectoriel V est dite lisse si le stabilisateur de chaque $v \in V$ est ouvert.

Étant donné une représentation lisse ρ de G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, on peut définir, pour $F \in C_c^\infty(G)$ et $v \in V$

$$F * v = F *_\rho v = \int F(h)(h \cdot v) d\mu(h). \tag{2.3.8}$$

L'intégrale du côté droit a un sens, car, étant donné que le stabilisateur de v est ouvert, il existe une partition du support de F en des intersections B_i d'un ensemble ouvert de G et du fermé $\operatorname{supp} F$ sur lesquelles $h \cdot v$ est constante, égale à v_i, disons. On a alors que

$$F * v = \sum_i \Big(\int_{B_i} F(h) d\mu(h) \Big) v_i.$$

Cela donne une structure de $C_c^\infty(G)$-module à gauche sur toute représentation lisse de G sur $\mathbb{C}$. Similairement, on peut construire un structure de $C_c^\infty(G)$-module à droite sur toute représentation lisse de G^{op} sur $\mathbb{C}$. On retrouve la convolution sur $C_c^\infty(G)$ en considérant la représentation de G donnée par $g \cdot F = F(g^{-1}-)$, qui est lisse par la remarque 2.3.6. Si on considère plutôt la représentation ρ de $G^{\rm op}$ donnée par $g \cdot F = F(-g^{-1})$, la construction précédente donne $F *_\rho F' = F' * F$. On a, en général,

$$h \cdot \int F'(h')(h' \cdot v) d\mu(h') = \int F'(h')(hh' \cdot v) d\mu(h'),$$

et donc

$$\begin{aligned}
(F * (F' * v)) &= \int F(h) \int F'(h')(hh' \cdot v) d\mu(h') d\mu(h) \\
&= \int \int F(h) F'(h^{-1}hh')(hh' \cdot v) d\mu(h) d\mu(h') \\
&= \int \Big(\int F(h) F'(h^{-1}hh')(hh' \cdot v) d\mu(h) \Big) d\mu(hh') \\
&= (F * F') * v.
\end{aligned}$$

En particulier, $*$ définit une structure de $\mathbb{C}$-algèbre associative, mais pas forcément commutative ni unitale, sur $C_c^\infty(G)$, et toute représentation lisse de G admet une action de $C_c^\infty(G)$ (comme algèbre associative), qui commute avec l'action du centre de G.

Soit V une représentation lisse de G. Pour tout sous-groupe ouvert et compact H de G, si on définit $e_H = (1/\mu(H))\mathbf{1}_H \in C_c^\infty(G)$, où $\mathbf{1}_H$ est la fonction indicatrice de H, on a que $e_H * v = v$ si $v \in V$ est H-invariant, et, en général, pour tout $h \in H$,

$$h \cdot (e_H * v) = \frac{1}{\mu(H)} \int_H (hh' \cdot v) d\mu(h') = \frac{1}{\mu(H)} \int_H (hh' \cdot v) d\mu(hh') = e_H * v,$$

par invariance à gauche de la mesure de Haar. Ainsi, l'action de e_H donne une projection $V \longrightarrow V^H$. En particulier, on a $e_H * e_H = e_H$ et $e_H * C_c^\infty(G) * e_H$ s'identifie avec le sous-anneau de $C_c^\infty(G)$ formé par les fonctions localement constantes et à support compact qui sont invariantes sous la multiplication à gauche et sous la multiplication à droite par un élément de H, ou fonctions H-bi-invariantes. La $\mathbb{C}$-algèbre associative et unitale (mais pas forcément commutative) $\mathcal{H}(G,H) := e_H * C_c^\infty(G) * e_H$ est appelée l'algèbre de Hecke de la paire (G,H).

Une base très commode de $\mathcal{H}(G,H)$ est donnée par les fonctions $[HgH] := (1/\mu(H))\mathbf{1}_{HgH}$ pour les différents choix de doubles classes HgH dans G. En effet, chacune de ces doubles classes est un ouvert compact de G. Toute fonction dans $\mathcal{H}(G,H)$ doit être constante sur chaque double classe HgH, par définition, et, comme celles-ci forment une partition de G, son support doit être une union finie de tels HgH, ce qui implique le résultat voulu. Notons que dans cette base, on a

$$\begin{aligned}
[HgH] * [Hg'H](f) &= \frac{1}{\mu(H)^2} \int \mathbf{1}_{HgH}(h) \mathbf{1}_{Hg'H}(h^{-1}f) d\mu(h) \\
&= \sum_{Hg''H \in H\backslash G/H} a_{[Hg''H]} [Hg''H](f),
\end{aligned}$$

où

$$a_{[Hg''H]} = \frac{\mu(HgH \cap g''H(g')^{-1}H)}{\mu(H)},$$

qui est zéro pour presque tout g'', et qui est, en général un entier positif. En effet, on peut décomposer un double quotient comme une union disjointe

$$HgH = \bigsqcup_{i=1}^{N} h_i gH,$$

où les h_i forme un système de représentants pour $H/(H \cap gHg^{-1})$, et donc $HgH \cap g''H(g')^{-1}H$ est une union disjointe de translatés de H. Ainsi, l'algèbre de Hecke est définie sur $\mathbb{Z}$, et on peut définir, en changeant les scalaires pour un anneau R, l'algèbre de Hecke des fonctions H-bi-invariantes à valeurs dans R, notée $R[G//H]$. En particulier, par définition, $\mathcal{H}(G,H) = \mathbb{C}[G//H]$. Étant donné une représentation lisse de G sur un R-module M et M^H le sous-module formé des éléments H-invariants, la formule (2.3.8) permet de définir une action de $R[G//H]$ sur M^H.

Exemple 2.3.9. Reprenons nos exemples $G = \mathrm{GL}_n(K)$ pour K un corps p-adique et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$ pour L un corps de nombres et S un ensemble fini d'idéaux premiers. On considère le cas le plus simple, soit le cas où $H = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)$ et $H = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} GL_n(\mathcal{O}_{L_\mathfrak{p}})$ respectivement. L'algèbre de Hecke obtenue est appelée l'algèbre de Hecke sphérique. D'abord, dans le cas où K est un corps p-adique, par le lemme 2.2.2, on a que K est engendré par les $[H\,\mathrm{diag}(\varpi^{m_1}, \dots, \varpi^{m_n})H]$ pour $m_1 \geq \dots \geq m_n$. Décrire la structure d'algèbre, même dans le cas que nous considérons, est non trivial. Cependant, on donne un argument classique permettant de montrer que l'algèbre de Hecke sphérique est commutative. D'abord, étant donnée deux fonctions $F_1, F_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n(K)//\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)]$, si on dénote $F_1'(g) = F_1(g^{\mathrm{T}})$ et $F_2'(g) = F_2(g^{\mathrm{T}})$ où $\cdot^{\mathrm{T}}$ dénote la transposition, on a que $F_1', F_2' \in \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n(K)//\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)]$ et

$$\begin{aligned} F_1' * F_2'(g) &= \int F_1'(h)F_2'(h^{-1}g)d\mu(h) = \int F_1(h^{\mathrm{T}})F_2(g^{\mathrm{T}}(h^{\mathrm{T}})^{-1})d\mu(h) \\ &= \int F_1((h')^{-1}g^{\mathrm{T}})F_2(h')d\mu(h') \\ &= F_2 * F_1(g^{\mathrm{T}}) \end{aligned}$$

où on utilise le changement de variables $h' = g^{\mathrm{T}}(h^{\mathrm{T}})^{-1}$ et l'invariance à gauche de la mesure de Haar. Or, par le lemme 2.2.2, on $F(g) = F(g^{\mathrm{T}})$ pour tout $F \in \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n(K)//\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_K)]$ et tout $g \in \mathrm{GL}_2(K)$, ce qui donne la commutativité. Le même argument fonctionne pour le cas adélique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^S_{L,f})$. Pour $n = 2$, on écrit

$$T_\mathfrak{p} := \left[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)\begin{pmatrix}\varpi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)\right]$$

et

$$S_{\mathfrak{p}} := \Big[\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K) \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K) \Big],$$

et on définit similairement des éléments $T_{\mathfrak{p}}$ et $S_{\mathfrak{p}}$ de $\mathbb{Z}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^S)// \prod_{\mathfrak{p} \notin S} GL_n(\mathcal{O}_{L_{\mathfrak{p}}}))$ pour $\mathfrak{p} \notin S$. Ces éléments ont une importance particulière parce que l'algèbre de Hecke sphérique est engendrée comme $\mathbb{Z}$-algèbre par les $T_{\mathfrak{p}}$, $S_{\mathfrak{p}}$ et $S_{\mathfrak{p}}^{-1}$ pour $\mathfrak{p} \notin S$ (voir [Gro98]).

2.4 Courbes modulaires adéliques

L'énoncé et la preuve du théorème 1.0.3 sont formulés dans le langage des courbes modulaires adéliques. Dans cette section, on introduit ces objets et on décrit certaines de leurs propriétés importantes. Les formes modulaires p-adiques surconvergentes correspondent à des sections de faisceaux inversibles sur la rigidification de ces courbes.

Typiquement, on définit d'abord les courbes modulaires comme des quotients $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ par un sous-groupe de congruence $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire un sous-groupe qui contient le sous-groupe $\Gamma(N) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : M \equiv \mathrm{id} \bmod N\}$ pour un certain entier N. On peut munir ce quotient d'une structure de variété complexe de dimension 1 si le sous-groupe Γ est suffisamment petit. Celle-ci est l'analytification complexe d'un courbe algébrique $Y(\Gamma)_{\mathbb{C}}/\operatorname{Spec}\mathbb{C}$. Mieux encore, cette courbe est définie sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe une courbe $Y(\Gamma)/\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ pour laquelle

$$Y(\Gamma)_{\mathbb{C}} = Y(\Gamma) \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Q}} \operatorname{Spec}\mathbb{C}.$$

La façon habituelle de montrer ce résultat est de remarquer que les points du quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ correspondent aux classes d'équivalences de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ munies de structures auxiliaires. On généralise ces structures auxiliaires aux courbes elliptiques sur des corps, des anneaux ou des schémas plus généraux, et on montre que le foncteur associant à un schéma la collection des classes d'équivalences d'une courbe elliptique et de telles structures auxiliaires est représentable. De plus, on a la compactification habituelle $\Gamma\backslash\mathbb{H}\cup\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, qui correspond à une surface de Riemann compacte, obtenue en ajoutant à $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ un nombre fini de points, appelés les pointes. On peut construire un schéma propre $X(\Gamma)$ dans lequel $Y(\Gamma)$ admet une immersion ouverte dense, et tel que la variété analytique complexe associée à $X(\Gamma)_{\mathbb{C}}$ est $\Gamma\backslash\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

Pour les courbes modulaires adéliques, les sous-groupes de congruence $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont remplacés par les sous-groupes ouverts et compacts $U \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$. Comme vu dans la section 2.2, par définition de la topologie sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ et celle sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour un nombre premier p, une base de voisinages ouverts de l'origine est donnée par

$$\prod_p U_{\mathbb{Q}_p, m_p} \tag{2.4.1}$$

où $U_{\mathbb{Q}_p,m_p}$ est défini par (2.2.1) et $m_p = 0$ pour tous les p en dehors d'un ensemble fini. On dénote le groupe (2.4.1) par U_N, où N est l'entier $N = \prod_p p^{m_p}$. On a que $U_N \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(N)$, et donc l'intersection de n'importe quel sous-groupe ouvert et compact $U \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ avec $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de congruence. Dans l'interprétation adélique, ce qui joue le rôle du quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ est le double quotient

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+\backslash\mathbb{H} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)/K, \tag{2.4.2}$$

où K agit par multiplication à droite sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ agit à gauche sur $\mathbb{H}$ de la façon habituelle, et par multiplication à gauche sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$. Étant donné $K \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ suffisamment petit, le double quotient (2.4.2) s'identifie aux points complexes d'une courbe algébrique, qui peut être définie sur $\mathbb{Q}$. Cette courbe est un espace de module fin, qui représente un foncteur associant, à un $\mathbb{Q}$-schéma localement noethérien S, les classes d'isogénie de courbes elliptiques munies d'une "structure de niveau K". Nous ne donnons pas les définitions détaillées ici (voir [Lan13, Definition 1.4.2.4] pour un traitement très général), comme celles-ci sont plutôt techniques et comme seulement certaines propriétés des constructions sont importantes pour expliquer la preuve du théorème 1.0.3. Les faits principaux à connaître pour la suite sont les suivants :

(1) Si K est suffisamment petit, le problème de module admet un espace de module fin X_K (*i.e.*, le foncteur qui le définit est représentable), qui est un $\mathbb{Q}$-schéma quasi-projectif et lisse. [Lan13, Theorem 1.4.1.12, Theorem 7.2.3.10].

(2) Il existe un $\mathbb{Q}$-schéma propre et normal X_K^* sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ dans lequel X_K admet une immersion ouverte dense. [Lan13, Theorem 7.2.4.1]

(3) Pour n'importe quelle courbe elliptique E/X_K dans la classe d'isogénie associé au morphisme $\mathrm{id} : X_K \longrightarrow X_K$, le pushforward du faisceau cotangent de E sur X_K est un faisceau inversible ample (qui ne dépend pas du choix de E). Il existe un faisceau inversible ample ω_K sur X_K^* qui l'étend. [Lan13, Theorem 7.2.4.1]

(4) Pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ et tous K, K' suffisamment petits avec $g^{-1}Kg \subseteq K'$, la définition de $X_{K'}$ et X_K comme espaces de modules induit un morphisme de $\mathbb{Q}$-schémas $[g] : X_K \longrightarrow X_{K'}$ qui est fini, étale et surjectif. C'est un isomorphisme quand $g^{-1}Kg = K'$. On a un isomorphisme canonique $g : [g]^*\omega_{K'}|_{X_{K'}} \longrightarrow \omega_K|_{X_K}$. Si, de plus, on a $K'' \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ suffisamment petit et $g' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ tel que $g'^{-1}K'g' \subseteq K''$, alors on a les factorisations $[gg'] = [g'] \circ [g]$ et $gg' = g \circ [g]^*g' : [gg']^*\omega_{K''}|_{X_{K''}} \longrightarrow \omega_K|_{X_K}$. [Box15, Proposition 2.4.1].

(5) Le morphisme $[g]$ s'étend en un morphisme fini et surjectif $[g] : X_K^* \longrightarrow X_{K'}^*$, qui est un isomorphisme quand $g^{-1}Kg = K'$. Celui-ci induit un isomorphisme $g : [g]^*\omega_{K'} \longrightarrow \omega_K$ qui étend l'isomorphisme $g : [g]^*\omega_{K'}|_{X_{K'}} \longrightarrow \omega_K|_{X_K}$. Ces applications vérifient les mêmes factorisations que plus haut. [Lan13, Theorem 7.2.4.1] [Box15, Proposition 3.3.10].

Comme X_K^* est un $\mathbb{Q}$-schéma propre, il en va de même pour son changement de base $X_{K,\mathbb{Q}_p}^* = X_K^* \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Q}} \operatorname{Spec}\mathbb{Q}_p$. En particulier, $X_{K,\mathbb{Q}_p}^*$ est un schéma de type fini sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}_p$, et donc on peut lui associer une variété analytique rigide $\mathcal{X}_K^*$, interprétée comme un espace adique sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$. Par les propriétés du foncteur de rigidification, on a toujours des morphismes $[g]$, des faisceaux inversibles amples que, par abus de notation, on continue de noter ω_K, et des morphismes induits $g : [g]^*\omega_{K'} \longrightarrow \omega_K$ qui satisfont les mêmes propriétés que celles décrites précédemment. Cela demeure vrai si on remplace $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{C}_p$.

2.5 Courbe modulaire perfectoïde et morphisme de périodes de Hodge-Tate

Dans ce qui suit, on spécialise la discussion de la section 2.6 au cas $K = K^pK_p$, où $K^p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ et $K_p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sont des sous-groupes ouverts et compacts, et K^p est suffisamment petit (contenu dans le groupe U_N (cf. section 2.2) pour $N \geq 3$ premier à p). La raison de le faire est que la limite $\lim_{K_p \to 1} \mathcal{X}^*_{K^pK_p}$ "existe", dans un sens précis qui est expliqué plus loin, dans la catégorie des espaces perfectoïdes. De plus, cet espace admet un morphisme

$$\pi_{\mathrm{HT}} : \lim_{K_p \to 1} \mathcal{X}^*_{K_pK^p} \longrightarrow (\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}},$$

où $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}$ dénote l'espace adique associé au schéma $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}_p$. Ce morphisme apparaît seulement lorsqu'on "passe au niveau infini en p". Cependant, celui-ci joue un rôle crucial dans la preuve du théorème 1.0.3.

Les limites inverses n'existent pas toujours dans la catégorie des espaces adiques. Cependant, étant donné un système inverse d'espaces adiques, on a parfois un espace qui est "presque" sa limite inverse, dans le sens suivant.

Définition 2.5.1 ([SW13, Definition 2.4.1])**.** Soit X_i, $i \in I$ un système cofiltré d'espaces adiques. Si X est un espace adique et $f_i : X \longrightarrow X_i, i \in I$ sont des morphismes compatibles avec ce système, alors on écrit $X \sim \lim_{i \in I} X_i$ si les conditions suivantes sont satisfaites.

(1) L'application continue $|X| \longrightarrow \lim_{i\in I} |X_i|$ induit par les $|f_i| : |X| \longrightarrow |X_i|$ est un homéomorphisme.

(2) Il existe un recouvrement de X par des ouverts affinoïdes $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ tels que l'application induite par les f_i

$$\operatorname*{colim}_{\mathrm{Spa}(B,B^+)\subseteq X_i} B \longrightarrow A,$$

où la colimite est sur la catégorie des ouverts affinoïdes contenus dans X_i (pour tous les i) a travers lesquels se factorise le morphisme $\mathrm{Spa}(A, A^+) \longrightarrow X_i$, est d'image dense.

Cette définition nous permet d'énoncer le théorème suivant, qui donne l'existence de la courbe modulaire perfectoïde et énonce ses propriétés importantes.

Théorème 2.5.2 ([Sch15, Theorem III.3.8])**.** *Soit $K^p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ un sous-groupe ouvert et compact contenu dans U_N pour $N \geq 3$ premier à p.*

(1) *Il existe un espace perfectoïde $\mathcal{X}^*_{K^p}$ sur $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ muni de morphismes $\pi_{K^pK_p} : \mathcal{X}^*_{K^p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{K^pK_p}$ et d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (comme espace adique, pas comme espace adique sur $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$) tel que*

$$\mathcal{X}^*_{K^p} \sim \lim_{K_p \to 1} \mathcal{X}^*_{K^pK_p}$$

de façon équivariante pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. $\mathcal{X}^*_{K^p}$ est unique à unique isomorphisme près.

(2) *Il existe un morphisme d'espaces adiques sur $\mathbb{Q}_p$*

$$\pi_{\mathrm{HT}} : \mathcal{X}^*_{K^p} \longrightarrow (\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}},$$

appelé le morphisme de périodes de Hodge-Tate, qui est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant (pour l'action à droite habituelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}$). De plus, si $\mathcal{O}(1)$ dénote le faisceau ample habituel sur $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}$, on a une identification $\pi^*_{\mathrm{HT}}\mathcal{O}(1) \cong \pi^*_{K^pK_p}\omega_{K^pK_p}$ pour tout K_p.

(3) *Si $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ et $g^{-1}K^pg \subseteq (K^p)' \subseteq U_N$ pour un $N \geq 3$ premier à p, alors il existe un morphisme $[g] : \mathcal{X}^*_{K^p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{(K^p)'}$, compatible avec les morphismes $[g] : \mathcal{X}^*_{K^pK_p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{(K^p)'K_p}$, et on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^*_{K^p} \arrow[r, "\pi_{\mathrm{HT}}"] \arrow[d, "{[g]}"'] & (\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}} \\
\mathcal{X}^*_{(K^p)'} \arrow[ur, "\pi_{\mathrm{HT}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme est un isomorphisme quand $g^{-1}K^pg = (K^p)'$.

(4) *Pour les sous-ensembles ouverts $V_1, V_2 \subseteq (\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}$ définis par $|y| \leq |x|$ et $|x| \leq |y|$ respectivement, où $[x : y]$ sont les coordonnées projectives (de façon équivalente, les sections globales habituelles du faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}$), alors les préimages $V_{K^p,1}, V_{K^p,2}$ de V_1, V_2 ainsi que leur intersection $V_{K^p,\{1,2\}}$ sont affinoïdes perfectoïdes. De plus, pour $\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\}$, il existe un système d'ouverts affinoïdes $V_{K^pK_p,J}$ pour K_p suffisamment petit avec $\pi^{-1}_{K^pK_p}(V_{K^pK_p,J}) = V_{K^p,J}$ et tels que l'identification*

$$\mathcal{X}^*_{K^p} \sim \lim_{K_p \to 1} \mathcal{X}^*_{K^pK_p}$$

se restreint en

$$V_{K^p,J} \sim \lim_{K_p \to 1} V_{K^pK_p,J}.$$

En particulier,

$$\operatorname*{colim}_{K_p \to 1} H^0(V_{K^pK_p,J}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p}}) \longrightarrow H^0(V_{K^p,J}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K^p}})$$

est d'image dense.

Remarque 2.5.3. On clarifie l'énoncé du théorème 2.5.2. Rappelons que par la section 2.4, pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (que l'on peut voir comme un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$) et tous K_p, K'_p suffisamment petits avec $g^{-1}K_pg \subseteq K'_p$, on a un morphisme

$$[g] : \mathcal{X}^*_{K^pK_p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{K^pK'_p}.$$

L'énoncé de la partie (1) du théorème 2.5.2 indique qu'il existe un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans le groupe des automorphismes d'espaces adiques de $\mathcal{X}^*_{K^p}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^*_{K^p} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_{K^pK_p}"'] & \mathcal{X}^*_{K^p} \arrow[d, "\pi_{K^pK'_p}"] \\
\mathcal{X}^*_{K^pK_p} \arrow[r, "{[g]}"] & \mathcal{X}^*_{K^pK'_p}
\end{tikzcd}$$

La notion d'être compatible avec les morphismes $[g] : \mathcal{X}^*_{K^pK_p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{(K^p)'K_p}$ dans la partie (3) est définie de façon analogue.

Remarque 2.5.4. Le théorème demeure vrai en remplaçant $\mathcal{X}^*_{K^pK_p}$ et $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ par $\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$ et $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$.

Remarque 2.5.5. Ici, on choisit les sections globales x, y de $\mathcal{O}(1)$ de sorte à ce que le point $\infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ corresponde à $y = 0$. C'est le choix opposé à celui fait dans [Pan25], où x et y sont choisis de telle sorte que ∞ soit donné par $x = 0$.

2.6 Formes modulaires classiques et surconvergentes

On peut maintenant définir les formes modulaires classiques et les formes modulaires p-adiques surconvergentes.

Définition 2.6.1. Soit R une $\mathbb{Q}$-algèbre. Une forme modulaire classique de poids k et de niveau $K \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ (pour K contenu dans U_N pour $N \geq 3$) sur R est une section globale

$$f \in H^0(X^*_K, \omega_K^{\otimes k}).$$

Une forme modulaire sur $\mathbb{Q}_p$ (respectivement $\mathbb{C}_p$) de niveau K et de poids k est, de façon équivalente, une section globale $f \in H^0(\mathcal{X}^*_K, \omega_K^{\otimes k})$ (respectivement $H^0(\mathcal{X}^*_{K,\mathbb{C}_p}, \omega_K^{\otimes k})$), par le théorème GAGA pour la rigidification. Dans tous les cas, le module des formes modulaires classiques d'un poids et d'un niveau donné sur un anneau R est de type fini, étant le module des sections globales d'un faisceau cohérent sur un schéma ou une variété analytique rigide propre.

Pour les formes modulaires surconvergentes, on utilise la définition non standard de Pan.

Définition 2.6.2 ([Pan22, Definition 5.2.5, Lemma 5.2.9], [Pan25, Section 4])**.** Soit $K^p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ un sous-groupe ouvert et compact contenu dans U_N pour un $N \geq 3$ copremier avec p. Pour $K_p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, on définit $\mathcal{V}_{K^pK_p}$ comme l'ensemble des ouverts $V \subseteq \mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$ tels qu'il existe un voisinage ouvert V_∞ de $\infty \in (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}}$ avec $\pi^{-1}_{K^pK_p}(V) = \pi^{-1}_{\mathrm{HT}}(V_\infty)$. Une forme modulaire p-adique de poids k et de niveau modéré K^p (sur $\mathbb{C}_p$) est un élément de la colimite filtrée

$$M_k^\dagger(K^p) := \operatorname*{colim}_{K_p \to 1} \operatorname*{colim}_{V \in \mathcal{V}_{K^pK_p}} H^0(V, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k}).$$

En particulier, le formes modulaires classiques sur $\mathbb{C}_p$ de poids K^pK_p et de niveau k sont naturellement un sous-espace de $M_k^\dagger(K^p)$. De plus, une forme modulaire de niveau modéré K^p est naturellement une forme modulaire de niveau modéré $(K^p)'$ pour tout $(K^p)' \subseteq K^p$.

On peut définir une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur la tour des paires (X_K^*, ω_K), via les isomorphismes $[g] : X_K^* \longrightarrow X^*_{g^{-1}Kg}$. Ceux-ci induisent une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur

$$\operatorname*{colim}_{K \to 1} H^0(X_K^*, \omega_K^{\otimes k}),$$

où l'action de g est induite par les isomorphismes

$$H^0(X_K^*, \omega_K^{\otimes k}) \longrightarrow H^0(X^*_{gKg^{-1}}, [g]^*\omega_K^{\otimes k}) \xrightarrow{g} H^0(\mathcal{X}^*_{gKg^{-1}}, \omega^{\otimes k}_{gKg^{-1}}).$$

On peut montrer que l'ensemble des éléments K-invariants pour cette action sur la colimite est exactement l'image de $H^0(X_K^*, \omega_K^{\otimes k})$, et donc on a une action de l'algèbre de Hecke $\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)//K]$ sur $H^0(X_K^*, \omega_K^{\otimes k})$. Par changement de base et analytification, on obtient des représentations lisses de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ sur les espaces

$$\operatorname*{colim}_{K \to 1} H^0(X^*_{K,R}, \omega_K^{\otimes k}),$$

$$\operatorname*{colim}_{K \to 1} H^0(\mathcal{X}^*_K, \omega_K^{\otimes k}),$$

et

$$\operatorname*{colim}_{K \to 1} H^0(\mathcal{X}^*_{K,\mathbb{C}_p}, \omega_K^{\otimes k}),$$

qui induisent des actions de l'algèbre $R[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)//K]$ (respectivement $\mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)//K]$) sur $H^0(X^*_{K,R}, \omega_K^{\otimes k})$ (respectivement $H^0(\mathcal{X}^*_K, \omega_K^{\otimes k})$ et $H^0(\mathcal{X}^*_{K,\mathbb{C}_p}, \omega_K^{\otimes k})$).

Par la partie (3) du théorème 2.5.2, on a aussi une action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ sur la tour des $(V, \omega_{K^pK_p}|_V)$, pour $V \in \mathcal{V}_{K^pK_p}$ pour les différents K^p, K_p suffisamment petits. Cette action se restreint naturellement aux tours des $(V_{K^pK_p}, \omega_{K^pK_p}|_{V_{K^pK_p}})$ pour $K^p \subseteq K_0^p$

et $V_{K^pK_p}$ la préimage de $V \in \mathcal{V}_{K_0^pK_p}$ par les morphismes $[\mathrm{id}] : \mathcal{X}^*_{K^pK_p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{K_0^pK_p}$. On obtient une représentation lisse de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ sur chaque colimite

$$\operatorname*{colim}_{K^p\to 1} H^0(V_{K^pK_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}).$$

Encore une fois, l'ensemble des éléments K_0^p-invariants est donné par $H^0(V_{K^pK_p}, \omega^{\otimes k}_{K_0^pK_p})$, donc ce sous-espace admet une action de l'algèbre de Hecke $\mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)//K_0^p]$.

Remarque 2.6.3. Le même argument permet de construire une action de $\mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)//K^p]$ sur $H^0(V, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ pour tout V tel que $\pi^{-1}_{K^pK_p}(V)$ coïncide avec la préimage d'un ouvert de $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}}$.

Par les propriétés de factorisation des morphismes $[g]$, pour $K_p \subseteq K'_p$ des sous-groupes ouverts et compacts suffisamment petits, on a

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p,\mathbb{C}_p} \arrow[r, "{[g]}"] \arrow[d, "{[\mathrm{id}]}"'] & \mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p} \arrow[d, "{[\mathrm{id}]}"'] \\
\mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K'_p,\mathbb{C}_p} \arrow[r, "{[g]}"] & \mathcal{X}^*_{K^pK'_p,\mathbb{C}_p}
\end{tikzcd}$$

les deux compositions étant égales à $[g] : \mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p,\mathbb{C}_p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{K^pK'_p,\mathbb{C}_p}$. En particulier, les actions de l'algèbre de Hecke induisent une action sur $M_k^\dagger(K^p)$. Enfin, $M_k^\dagger(K^p)$ admet aussi une action à gauche de $B(\mathbb{Q}_p)$, le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures. En effet, étant donné $g \in B(\mathbb{Q}_p)$ et $V \in \mathcal{V}_{K^pK_p}$, on a que $[g]^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{K^pgK_pg^{-1}}$. Cela suit du fait qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^*_{K^p(K_p\cap gK_pg^{-1}),\mathbb{C}_p} \arrow[d, "{[g]}"'] & \mathcal{X}^*_{K^p,\mathbb{C}_p} \arrow[l, "\pi_{K^p(K_p\cap gK_pg^{-1})}"'] \arrow[r, "\pi_{\mathrm{HT}}"'] \arrow[d, "g"'] & (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}} \arrow[d, "g"'] \\
\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p} & \mathcal{X}^*_{K^p,\mathbb{C}_p} \arrow[l, "\pi_{K^pK_p}"'] \arrow[r, "\pi_{\mathrm{HT}}"'] & (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}}
\end{tikzcd}$$

et que le stabilisateur de $\infty \in (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}}$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_P)$ est $B(\mathbb{Q}_p)$. Comme avant, cela définit une action sur

$$\operatorname*{colim}_{K_p\to 1}\operatorname*{colim}_{V\in\mathcal{V}_{K^pK_p}} H^0(V, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}) = M_k^\dagger(K^p).$$

Remarque 2.6.4. La définition de ces actions permet de déduire certaines propriétés.

(1) L'algèbre de Hecke $\mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)//K^p]$ agit sur $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ via le morphisme naturel
$$\mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)//K^p] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)//K^pK_p].$$
Le morphisme $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}) \longrightarrow M_k^\dagger(K^p)$ est équivariant pour cette action.

(2) L'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ commute avec celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$, et donc avec celles des algèbres de Hecke.

En vertu de la définition de la topologie sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$, on peut supposer que $K^p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ un sous-groupe ouvert et compact de la forme $K^p = \prod_{\ell \neq p} K_\ell$ avec $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ pour tout $\ell \notin S$, où S est un ensemble fini de nombres premiers contenant p. On a alors une action de l'algèbre de Hecke sphérique
$$\mathbb{Z}_p\Big[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^S)//\prod_{\ell \notin S} \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)\Big] \tag{2.6.5}$$
sur l'espace des formes modulaire surconvergentes de niveau modéré et poids donné à travers l'action de $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)//K^p]$.

Définition 2.6.6. Soit K^p comme plus haut.

(1) Une forme propre classique de niveau K^pK_p et de poids k est un vecteur propre commun pour l'action des éléments de (2.6.5) sur l'espace des formes modulaires classiques de niveau K^pK_p et de poids k.

(2) Une forme propre surconvergente de niveau modéré K^p et de poids k est un vecteur propre commun pour l'action des éléments de (2.6.5) sur l'espace des formes modulaires p-adiques surconvergentes de niveau modéré K^p et de poids k, telle que le corps engendré par $\mathbb{Q}_p$ et toutes les valeurs propres est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

Remarque 2.6.7. Voici quelques remarques sur la définition.

(1) Le morphisme $M_k^\dagger(K^p) \longrightarrow M_k^\dagger((K^p)')$ pour $(K^p)' \subseteq K^p$ préserve la notion de forme propre surconvergente. Il préserve aussi les valeurs propres des T_ℓ, S_ℓ pour les ℓ tels que $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$.

(2) L'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par l'ensemble des valeurs propres associées à une forme propre classique est une extension finie de $\mathbb{Q}$, et donc une forme propre classique est forme propre surconvergente. Cela suit de la théorie classique des formes modulaires et du fait que $\mathbb{C}_p$ et $\mathbb{C}$ sont (non canoniquement) isomorphes.

(3) Il existe beaucoup de formes propres classiques. En fait, il suit de la théorie habituelle des formes modulaires (cf., par exemple, [DS05, Corollary 5.6.3]) que l'espace des formes modulaires classiques de niveau K^pK_p et de poids k admet une base de formes propres. Nous ne montrons pas l'existence de formes propres surconvergentes qui ne sont pas classiques dans ce mémoire.

2.7 Représentations galoisiennes

Dans cette section, on rappelle certaines définitions et certains résultats de la théorie des représentations de groupes et des représentations galoisiennes. L'un de nos buts est de définir la représentation associée à une forme propre surconvergente. Pour ce faire, on commence par rappeler la notion de trace d'une représentation.

Définition 2.7.1. Soit G un groupe et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ une représentation de G sur le F-espace vectoriel de dimension fini V. La trace de la représentation ρ est la fonction $\mathrm{Tr}\,\rho : G \longrightarrow F$ envoyant $g \in G$ vers $\mathrm{Tr}(\rho(g))$, la trace comme endomorphisme.

La trace d'une représentation est particulièrement intéressante pour les représentations semi-simples sur les corps de caractéristique 0.

Définition 2.7.2. Une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ d'un groupe G sur un F-espace vectoriel de dimension finie V est dite simple ou irréductible si V n'admet pas de sous-représentation non triviale (*i.e.*, s'il n'existe pas de sous-espace $V' \subseteq V$ différent de $0, V$ tel que V' est préservé par G). Elle est dite semi-simple si on a une décomposition $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ où, pour tout i, V_i est une sous-représentation et la restriction de l'action de G à V_i en fait une représentation simple.

Étant donné une représentation de dimension finie quelconque, on peut lui associer une représentation semi-simple de même dimension de façon canonique.

Définition 2.7.3. Soit ρ une représentation d'un groupe G sur V, un F-espace vectoriel de dimension d. Si $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = V$ est une filtration saturée de sous-représentations, alors $\bigoplus_{i=1}^n V_i/V_{i-1}$ est une représentation semi-simple appelée la semi-simplification de ρ.

Par construction, la semi-simplification d'une représentation de dimension d est de dimension d. La définition ne dépend pas du choix des V_i par le théorème de Jordan-Hölder. Enfin, si F est un corps non archimédien (par exemple), G est un groupe topologique et la représentation ρ est continue, si on munit chaque facteur V_i/V_{i-1} de la norme quotient, la semi-simplification de ρ est continue.

Une représentation semi-simple de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 est complètement déterminée par sa trace.

Proposition 2.7.4. *Soit G un groupe, F un corps, et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{End}_F(V')$ des représentations semi-simples. Si $\mathrm{Tr}\,\rho = \mathrm{Tr}\,\rho'$, alors ρ et ρ' sont isomorphes comme représentations, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme G-équivariant $V \longrightarrow V'$.*

En fait, on a un résultat plus général venant de l'algèbre commutative.

Définition 2.7.5. Pour G un groupe et R un anneau, on définit $R[G]$, l'algèbre de groupe de G, comme l'ensemble des fonctions à support fini $G \longrightarrow R$. On peut le munir d'une structure de R-module via $(af_1+bf_2)(g) = af_1(g)+bf_2(g)$ pour tous $f_1, f_2 \in R[G], a, b \in$

R et $g \in G$. On peut faire de $R[G]$ une algèbre associative et unitale, mais généralement pas commutative, via la formule

$$(f_1 f_2)(g) = \sum_{g' \in G} f_1(g') f_2((g')^{-1} g).$$

Une R-base de $R[G]$ est donnée par les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_g$ des éléments $g \in G$, et on peut identifier g et $\mathbf{1}_g$. Il est clair que pour F un corps, la donnée d'une représentation de G sur F-espace vectoriel de dimension finie V est équivalente à celle d'un $F[G]$-module, en faisant agir $\mathbf{1}_g$ par $\rho(g)$, et que cette identification met en correspondance les représentations simples (respectivement semi-simples) avec les sous-modules à gauche simples (respectivement semi-simples) de $F[G]$. On peut aussi définir la trace d'un élément f de $F[G]$ pour un module à gauche V de dimension finie sur F comme la trace de l'endomorphisme F-linéaire donné par la multiplication par f. Notons que la fonction $\mathrm{Tr} : F[G] \longrightarrow F$ est alors F-linéaire, donc elle est déterminée par les valeurs de $\mathrm{Tr}(\mathbf{1}_g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$. On a le résultat suivant.

Proposition 2.7.6 ([Lan02, XVII, Corollary 3.8])**.** *Soit F un corps de caractéristique 0, B une F-algèbre pas forcément commutative et V, V' des B-modules à gauche semi-simples de dimension finie sur F. Si $\mathrm{Tr}_V = \mathrm{Tr}_{V'}$, alors $V \cong V'$ comme B-modules.*

En appliquant ce résultat à $B = F[G]$ et V, V' les B-modules à gauche associé à des représentations ρ, ρ', on déduit la proposition 2.7.4.

Concentrons nous maintenant sur le cas qui nous intéresse, soit celui des représentations continues de $G = G_{\mathbb{Q}}$. On commence par rappeler la définition d'un Frobenius géométrique associé à nombre premier p. L'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ préserve sa valeur absolue habituelle, et donc aussi son anneau des entiers

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : |x| \leq 1\}$$

et son idéal maximal

$$\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : |x| < 1\}.$$

Il suit que σ induit, par réduction modulo $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$, un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$, comme

$$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} / \mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Cela définit un morphisme de groupes

$$G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p),$$

et on peut montrer que celui-ci est surjectif. Si $I_{\mathbb{Q}_p}$ est son noyau, alors on a un isomorphisme de groupes

$$G_{\mathbb{Q}_p}/I_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p).$$

Le côté droit est engendré topologiquement par le morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$, dans le sens que le sous-groupe engendré par cet élément est dense dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$. On appelle Frobenius géométrique n'importe quel élément de la classe modulo $I_{\mathbb{Q}_p}$ qui est envoyé vers l'inverse de $x \longmapsto x^p$. On appelle aussi Frobenius géométrique en p, noté Frob_p, n'importe quel élément $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ qui est identifié à un Frobenius géométrique via une inclusion $G_{\mathbb{Q}_p} \subseteq G_{\mathbb{Q}}$ induite par un choix de plongement $\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. L'image de I_p dans $G_{\mathbb{Q}}$ est appelé un sous-groupe d'inertie. Tous les sous-groupes d'inerties sont conjugués.

Bien que Frob_p ne soit pas un élément bien défini de $G_{\mathbb{Q}}$, pour certaines représentations ρ, la trace $\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ a un sens.

Définition 2.7.7. Soit $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$, une représentation de $G_{\mathbb{Q}}$ sur un F-espace vectoriel V de dimension finie. On dit que ρ est non ramifiée en p si $\rho(I_p) = \{\mathrm{id}\}$ pour I_p un groupe d'inertie. Pour S un ensemble de nombres premiers, on dit que ρ est non ramifiée hors de S si elle est non ramifiée pour tout nombre premier n'appartenant pas à S.

Remarque 2.7.8. Une représentation $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$ est non ramifiée en dehors de S si et seulement si ρ se factorise par $G_{\mathbb{Q},S}$, le groupe de Galois de la plus grande extension de $\mathbb{Q}$ non ramifiée en dehors de S.

Comme le sous-groupe d'inertie pour un nombre premier p est défini à conjugaison près, cette définition ne dépend pas du choix arbitraire de I_p. Comme la trace d'une matrice est invariante par conjugaison et que les sous-groupes de décomposition de $G_{\mathbb{Q}}$ sont conjugués, il suit que si ρ est non ramifiée en p, $\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ ne dépend pas du choix de Frob_p. En fait, par ce même raisonnement, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme associé à n'importe quel Frobenius géométrique est le même. Une raison importante de s'intéresser aux traces des Frobenius géométriques est la proposition suivante.

Proposition 2.7.9. *Soit G un groupe topologique, F un corps topologique qui est de Hausdorff, et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}_F(V)$, $\rho' : G \longrightarrow \mathrm{End}_F(V')$ des représentations continues semi-simples sur des F-espaces vectoriels de même dimension d non ramifiées en dehors d'un ensemble fini S de nombres premiers. Si $\mathrm{Tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p) = \mathrm{Tr}\,\rho'(\mathrm{Frob}_p)$ pour tout $p \notin S$, alors ρ et ρ' sont isomorphes comme représentations.*

Démonstration. Ce résultat suit directement de 2.7.4 si on peut montrer que $\{\mathrm{Frob}_p : p \notin S\}$ est dense dans $G_{\mathbb{Q}}$. En effet, comme ρ et ρ' sont continues et que l'application de trace $\mathrm{End}_F(V) \longrightarrow F$ est continue, on a alors que $\mathrm{Tr}\,\rho$ et $\mathrm{Tr}\,\rho'$ sont des fonctions continues vers un espace de Hausdorff qui coïncident sur un sous-ensemble dense de $G_{\mathbb{Q}}$, donc elles coïncident sur tout $G_{\mathbb{Q}}$. Pour montrer la densité des Frobenius géométriques, on remarque que par définition de la topologie de Krull, il suffit de montrer que la restriction des Frobenius à $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ pour toute extension finie $L/\mathbb{Q}$ intersecte toutes les classes de conjugaisons. Cela suit du théorème de densité de Chebotarev.

□

La proposition 2.7.9 nous permet de définir la représentation associée à une forme propre surconvergente.

Définition 2.7.10. Soit f une forme modulaire surconvergente propre de niveau modéré $K^p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$, de la forme $K^p = \prod_{\ell \neq p} K_\ell$, avec $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ pour tous les premiers $\ell \notin S'$, un ensemble fini. Soit $S = S' \cup \{p\}$. Écrivons, pour $\ell \notin S$ un nombre premier, $\ell^{-1} T_\ell f = \lambda_\ell f$ et $\ell^{-1} S_\ell f = \mu_\ell f$. Fixons un morphisme $\mathbb{Q}_p(\lambda_\ell, \mu_\ell, \ell \notin S) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. La représentation p-adique associée à f est l'unique représentation continue de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui est semi-simple, non ramifiée en dehors de S et pour laquelle pour laquelle

$$\mathrm{Tr}\, \rho(\mathrm{Frob}_\ell) = \lambda_\ell$$

et

$$\det \rho(\mathrm{Frob}_\ell) = \mu_\ell$$

pour tout $\ell \notin S$.

La représentation associée à une forme propre surconvergente existe toujours (voir [Hid89]). Par la proposition 2.7.4, la condition $\mathrm{Tr}\, \rho(\mathrm{Frob}_\ell) = \lambda_\ell$ pour $\ell \notin S$ est détermine à elle seule la représentation associée à une forme modulaire propre. Enfin, on peut montrer que la représentation associée à une forme propre surconvergente est définie sur une extension finie de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Cela suit, par exemple, de notre démonstration du théorème 1.0.3 (cf. remarque 4.3.2).

Un outil utile pour la suite est que, dans un certain sens, la proposition 2.7.4 admet une réciproque lorsqu'on est sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 : pour toute fonction qui se comporte comme la trace d'une représentation (continue) de dimension d sur un corps (topologique) algébriquement clos, il existe une représentation (continue) dont c'est la trace, qui est unique à isomorphisme près. Pour rendre ce résultat plus précis, on doit définir la notion de pseudo-représentation, introduite par Wiles en dimension 2 (cf. [Wil88]) et par Taylor en dimension arbitraire (cf. [Tay91]).

Définition 2.7.11 ([Tay91, Section 1.1])**.** Soit G un groupe et R un anneau. Une pseudo-représentation de G de dimension d sur R est une application $T : G \longrightarrow R$ qui possède les propriétés suivantes :

(1) $T(1) = d$.

(2) $T(g_1 g_2) = T(g_2 g_1)$.

(3) Soit S_{d+1} le groupe symétrique pour l'ensemble $\{1, \ldots, d+1\}$. On a

$$\sum_{\sigma \in S_{d+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) T_\sigma(g_1, \ldots, g_{d+1}) = 0,$$

où $\mathrm{sgn}(\sigma)$ est le signe de la permutation σ, et, si la décomposition en cycles de σ est

$$\sigma = (i_1^{(1)} \ldots i_{r_1}^{(1)}) \ldots (i_1^{(m)} \ldots i_{r_m}^{(m)}),$$

on définit

$$T_\sigma(g_1, \ldots, g_{d+1}) := T(g_{i_1^{(1)}} \ldots g_{i_{r_1}^{(1)}}) \cdots T(g_{i_1^{(m)}} \ldots g_{i_{r_m}^{(m)}}).$$

C'est bien défini par (2).

Si G est un groupe topologique, R est un anneau topologique et T est une fonction continue, on dit que T est une pseudo-représentation continue.

La trace d'une représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_R(M)$, où M est un module libre de rang d sur un anneau R, est une pseudo-représentation de dimension d sur R. Si G et R sont munis d'une topologie et ρ est continue, la pseudo-représentation associée est continue. Dans les deux cas, la seule propriété qui n'est pas immédiate est la propriété (3). On renvoie à [Tay91, section 1.2] pour la preuve. Si R est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, toute pseudo-représentation est obtenue de cette façon.

Théorème 2.7.12 ([Tay91, Theorem 1 (2)])**.** *Soit T une pseudo-représentation de dimension d d'un groupe G sur F un corps algébriquement clos. Alors il existe une représentation semi-simple $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_F(V)$ de dimension d, unique à isomorphisme près, telle que $T = \mathrm{Tr}\,\rho$. Si G est un groupe topologique, F est un corps topologique et T est une quasi-représentation continue, alors ρ est continue.*

On définit aussi une généralisation de la notion de déterminant et de polynôme caractéristique.

Définition 2.7.13. Soit R un anneau.

(1) Pour M un R-module, on définit un foncteur $\underline{M}$ de la catégorie des R-algèbres vers la catégorie des ensembles qui envoie une algèbre A/R vers $M \otimes_R A$ et un morphisme de R-algèbres $f : A \longrightarrow A'$ vers l'application induite $1 \otimes_R f : M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R A'$.

(2) Pour M, N des R-modules, une loi polynôme de M dans N est une transformation naturelle $P : \underline{M} \longrightarrow \underline{N}$. Elle est appelée homogène de degré d si elle satisfait, pour toute R-algèbre A, $\eta_A(am) = a^d \eta_A(m)$ pour tout $m \in M \otimes_A A$ et $a \in A$. [Rob63, Chapitre I]

(3) Un déterminant de dimension d à valeurs dans R sur un groupe G est une loi polynôme $D : R[G] \longrightarrow R$ qui est homogène de degré d et qui est multiplicative, c'est-à-dire qui satisfait aussi $D_A(1) = 1$ et $D_A(ff') = D_A(f)D_A(f')$ pour toute R-algèbre A et tous $f, f' \in R[G] \otimes_R A = A[G]$. [Che14].

Remarque 2.7.14. Les noms de loi polynôme et de loi polynôme homogène de degré d peuvent être justifiés de la façon suivante. Soit $R[X_1, X_2, \ldots]$ l'anneau polynomial en un nombre infini dénombrable de variables. Étant donné M et N des R-modules et $P : \underline{M} \longrightarrow \underline{N}$ une loi polynôme, on considère le morphisme correspondant

$$P_{R[X_1,X_2,\ldots]} : M \otimes_R R[X_1, X_2, \ldots] \longrightarrow N \otimes_R R[X_1, X_2, \ldots].$$

Pour toute collection $(m_i)_{i \geq 1}$ avec $m_i \in M$ et $m_i = 0$ en dehors d'un sous-ensemble fini, on a

$$P_{R[X_1,X_2,\ldots]}\Big(\sum_i m_i \otimes X_i\Big) = \sum_\alpha c_{\alpha,(m_i)_{i\geq 1}} \otimes X^\alpha,$$

où la deuxième somme est sur les multi-indices $\alpha = (\alpha_j)_{j\geq 1}$ avec $\alpha_j = 0$ en dehors d'un ensemble fini de j, et $c_{\alpha,(m_i)_{i\geq 1}} \in N$ est nul en dehors d'un ensemble fini de α, de sorte que le côté droit soit un polynôme. Si A est une R-algèbre et $a_1, \ldots, a_n \in A$, alors, via le morphisme

$$R[X_1, X_2, \ldots] \longrightarrow A$$

qui envoie X_i vers a_i pour $1 \leq i \leq n$ et X_i vers 0 pour $i > n$, la définition d'une loi polynôme implique que

$$P_A\Big(\sum_i m_i \otimes a_i\Big) = \sum_\alpha c_{\alpha,(m_i)_{i\geq 1}} a^\alpha,$$

où $a = (a_i)_{i\geq 1}$ avec $a_i = 0$ pour $i > n$, $m_i \in M$ pour tout i et $m_i = 0$ pour $i > n$. Ainsi, une loi polynôme P est déterminée par les polynômes $P_{R[X_1,X_2,\ldots]}\Big(\sum_i m_i \otimes X_i\Big)$. Le même argument montre qu'on peut demander que les m_i qui sont non nuls soient dans un ensemble fixé de générateurs de M. Toute permutation σ de l'ensemble des entiers strictement positifs induit un automorphisme de R-algèbre sur $R[X_1, X_2, \ldots]$, que l'on notera aussi par σ. Il suit alors de la définition de loi polynôme que

$$\sigma\Big(P_{R[X_1,X_2,\ldots]}\Big(\sum_i m_i \otimes X_i\Big)\Big) = P_{R[X_1,X_2,\ldots]}\Big(\sum_i m_i \otimes X_{\sigma(i)}\Big). \tag{2.7.15}$$

Si P est homogène de degré d, alors les polynômes $P_{R[X_1,X_2,\ldots]}\Big(\sum_i m_i \otimes X_i\Big)$ sont homogènes de degré d. En effet, si on considère l'inclusion d'anneaux polynomiaux

$$R[X_1, X_2, \ldots] \longrightarrow R[Y, X_1, X_2, \ldots]$$

et le morphisme

$$R[X_1, X_2, \ldots] \longrightarrow R[Y, X_1, X_2, \ldots]$$

qui envoie X_i sur YX_i, alors il suit de la définition que

$$Y^d P_{R[X_1,X_2,\ldots]}\Big(\sum_i m_i \otimes X_i\Big) = P_{R[Y,X_1,X_2,\ldots]}\Big(\sum_i m_i \otimes YX_i\Big),$$

et donc on a l'égalité de polynômes

$$\sum_\alpha c_{\alpha,(m_i)_{i\geq 1}} \otimes X^\alpha Y^d = \sum_\alpha c_{\alpha,(m_i)_{i\geq 1}} \otimes X^\alpha Y^{\deg \alpha}.$$

Cela force $c_{\alpha,(m_i)_{i\geq 1}} = 0$ pour $\deg \alpha \neq d$, comme voulu. En vertu de (2.7.15) et de la définition de loi polynôme, P est complètement déterminé par les polynômes homogènes de degré d donnés par $P_{R[X_1,X_2,\ldots,X_d]}\Big(\sum_{i=1}^d m_i \otimes X_i\Big)$ pour les collections $(m_i)_{i=1}^d$ avec les m_i dans n'importe quel sous-ensemble de générateurs de M comme R-module.

Étant donné une représentation ρ d'un groupe G sur R^d pour un anneau R, on obtient, pour toute R-algèbre A, une représentation ρ_A de G sur A^d obtenue par changement de base. On a alors que les applications

$$\begin{aligned} \det \rho_A : A[G] &\longrightarrow A \\ \sum_{g\in G} a_g \mathbf{1}_g &\longmapsto \det\Big(\sum_{g\in G} a_g \rho(g)\Big) \end{aligned}$$

forment un déterminant de dimension d à valeurs dans R sur G. Étant donné un déterminant D de dimension d à valeurs dans R sur un groupe G, on définit, pour toute R-algèbre A, le polynôme caractéristique d'un élément $f \in A[G]$ par $D_{A[X]}(X - f) \in A[X]$. Si D correspond au déterminant d'une représentation, cette notion coïncide avec la notion habituelle de polynôme caractéristique. En général, le polynôme obtenu est unitaire et de degré d. En effet, il suit de la remarque 2.7.14 que pour tous $n \geq 2$ et $g_2, \ldots, g_n \in G$, on a un polynôme

$$D_{R[X_1,\ldots,X_n]}(1 \otimes X_1 + \ldots + \mathbf{1}_{g_n} \otimes X_n) = \sum_{\substack{\alpha \\ \deg \alpha = d}} c_{\alpha,(g_i)_{i=2}^n} X^\alpha.$$

Ainsi, si A est une R-algèbre, $f = \sum_{i=2}^n a_i \mathbf{1}_g \in A[G]$, alors, en considérant le morphisme de R-algèbres $R[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A[X]$ qui envoie X_1 sur X et X_i sur $-a_i$ pour $i \geq 2$, on peut écrire

$$D_{A[X]}(X - f) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i (\Lambda_i)_A(f) X^{d-i}$$

pour $(\Lambda_i)_A(f) \in A$. Ce même argument montre que Λ_i est une loi polynôme homogène de degré i de $A[G]$ dans A pour tout i. En particulier, en considérant le morphisme $A[X] \longrightarrow A$ d'évaluation en 0, on déduit que $D_A = (\Lambda_d)_A$. Ensuite, il suit de la remarque 2.7.14 que, comme Λ_0 est homogène de degré 0, elle est donnée par un système d'applications constantes $(\Lambda_0)_A(f) = r \cdot 1$ pour toute R-algèbre A, où $r \in R$. Pour conclure que $r = 1$, on remarque que

$$D_{R[X_1,X_2]}(1 \otimes X_1 + 1 \otimes X_2) = \sum_{i=0}^{d} c_{d-i} X_1^{d-i} X_2^i$$

avec $c_i = c_{d-i}$ (en considérant l'automorphisme de $R[X_1, X_2]$ qui inverse les deux variables). Il suit que

$$D_{R[X]}(X_1 - 1) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i c_{d-i} X_1^{d-i} = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i (\Lambda_i)_R(1) X_1^{d-i},$$

et donc $r = (\Lambda_0)_R(1) = (\Lambda_d)_R(1) = 1$. Enfin, comme Λ_1 est une loi polynôme de degré 1, l'application $(\Lambda_1)_A : A[G] \longrightarrow A$ est A-linéaire pour tout A, et il est raisonnable d'appeler sa restriction à G la trace $\operatorname{Tr} D$ associée au déterminant D. Celle-ci est une pseudo-représentation, par [Che14, Lemma 1.12].

La théorie des déterminants est plus commode que celle des pseudo-représentations en caractéristique positive. Notamment, on a une version améliorée du théorème 2.7.12 qui fonctionne en toute caractéristique.

Théorème 2.7.16 ([Che14, Theorem 2.12]). *Si F est un corps algébriquement clos et D est un déterminant de dimension d à valeurs dans F sur un groupe G, alors il existe une unique (à isomorphisme près) représentation semi-simple ρ de dimension d de G sur F telle que $D = \det \rho$.*

Si R est une $\mathbb{Q}$-algèbre, la donnée d'un déterminant est la même que celle d'une pseudo-représentation.

Proposition 2.7.17 ([Che14, Proposition 1.27]). *Soit R une $\mathbb{Q}$-algèbre. L'application $D \longmapsto \operatorname{Tr} D$ de l'ensemble des déterminants de degré d à valeurs dans R sur un groupe G dans l'ensemble des pseudo-représentations de dimension d sur R de G est bijective.*

Enfin, comme pour les pseudo-représentations, il existe une notion de continuité d'un déterminant quand le groupe G et l'anneau R sont munis d'une topologie.

Définition 2.7.18. Soit G un groupe topologique et R un anneau topologique. Un déterminant D de dimension d à valeurs dans R sur G est continu si les applications

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow R \\ g &\longmapsto \Lambda_i(\mathbf{1}_g) \end{aligned}$$

pour $i = 1, \ldots, d$ sont continues.

Il est immédiat de la définition que la trace d'un déterminant continu est une pseudo-représentation continue. De plus, un déterminant continu sur G est complètement déterminé par les restrictions $\Lambda_i|_E$ pour E n'importe quel sous-ensemble dense $E \subseteq G$ (voir [Che14, section 2.30]). Étant donné un déterminant D (continu) à valeurs dans R et un morphisme d'anneaux (continu) $R \longrightarrow R'$, on obtient un déterminant (continu) de même dimension sur R' par restriction de D à la catégorie des R'-algèbres.

On remarque qu'on peut "recoller" des déterminants continus à valeurs dans des anneaux $A_1, \ldots, A_n$ en un déterminant continu à valeurs dans $\prod_i A_i$.

Proposition 2.7.19. *Soient $R_1, \ldots, R_n$ des anneaux topologiques et G un groupe topologique, et, pour $i = 1, \ldots, n$, soit D_i un déterminant continu de dimension d à valeurs dans R_i sur G. Alors il existe un déterminant $D = \prod_i D_i$ de dimension d à valeurs dans $R = \prod_i R_i$ sur G, continu pour la topologie produit, tel que, pour tout i, le déterminant à valeurs dans R_i induit par le morphisme $R \longrightarrow R_i$ est D_i.*

Démonstration. On a

$$R[G] = \prod_i R_i[G]$$

comme R-algèbres. Pour toute R-algèbre A, on a une décomposition naturelle

$$A = \prod_i A_i$$

comme R-algèbres, où A_i est une R_i-algèbre. On définit $D_A : R[G] \otimes_R A \longrightarrow A$ par la composition

$$R[G] \otimes_R A = \prod_i (R_i[G] \otimes_{R_i} A_i) \overset{\prod_i (D_i)_{A_i}}{\longrightarrow} \prod_i A_i = A.$$

C'est clairement un déterminant. Le polynôme caractéristique de l'élément $g \in G$ est donné par $(D_i(X - \mathbf{1}_g))_i \in \prod_i A_i[X] = A[X]$, et donc, pour tout j, $\Lambda_j^A = \prod_i \Lambda_j^{A_i}$, qui est continu pour la topologie produit.

□

Enfin, on a besoin d'un résultat sur le relèvement de déterminants. Soit $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. On suppose qu'on a un déterminant D de dimension d à valeurs dans $\mathbb{F}$ sur G, continu pour la topologie discrète sur $\mathbb{F}$. Soit $W(\mathbb{F})$ l'anneau des vecteurs de Witt (qui s'identifie à l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et dont l'idéal maximal est engendré par p). On considère la catégorie $\mathcal{C}$ des $W(\mathbb{F})$-algèbres (commutatives) locales et profinies de corps résiduel $\mathbb{F}$. On définit un foncteur covariant $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des ensembles qui envoie une $W(\mathbb{F})$-algèbre locale et profinie A vers l'ensemble des déterminants continus de dimension d à valeurs dans A sur G pour lesquels le morphisme canonique de passage au quotient par l'idéal maximal $A \longrightarrow \mathbb{F}$ (qui est continu) induit le déterminant D. On a le résultat suivant.

Proposition 2.7.20 ([Che14, section 3.1])**.** *Le foncteur $\mathcal{F}$ est représentable par une $W(\mathbb{F})$-algèbre locale et profinie. Cette algèbre est noethérienne, et donc est de la forme*

$$W(\mathbb{F})[[X_1, \ldots, X_n]]/I$$

pour un idéal I, muni de la topologie quotient (pour la topologie $(p, X_1, \ldots, X_n)$-adique sur $W(\mathbb{F})[[X_1, \ldots, X_n]]$).

2.8 Théorie de Sen

Un programme de Sen, débuté dans [Sen80], permet d'étudier les représentations semi-linéaires continues de dimension finie du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathbb{C}_p$. Le groupe $G_{\mathbb{Q}_p}$ agit sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ par des applications continues, et son action s'étend à $\mathbb{C}_p$ en définissant

$$\sigma(x) = \lim_{n \to \infty} \sigma(x_n),$$

pour $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$, $x \in \mathbb{C}_p$ et $(x_n)_n$ une suite d'éléments dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui converge vers x. On vérifie aisément que cela ne dépend pas du choix de suite $(x_n)_n$.

Définition 2.8.1. Une représentation semi-linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension d sur un corps $K \subseteq \mathbb{C}_p$ est un K-espace vectoriel W de dimension d muni d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ qui vérifie

$$\sigma(v + v') = \sigma(v) + \sigma(v')$$

et

$$\sigma(av) = \sigma(a)\sigma(v)$$

pour tous $a \in K$, $v \in V$, où l'action de σ sur a est donnée par l'action habituelle de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathbb{C}_p$. Elle est continue si, pour un choix de base $e_1, \ldots, e_n$ de W, l'application $G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ envoyant un élément σ vers la matrice dont les colonnes correspondent aux décompositions de $\sigma(e_1), \ldots, \sigma(e_n)$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$ est continue.

Remarque 2.8.2. Soit $U_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ la matrice correspondant à $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ pour une représentation semi-linéaire et une base $e_1, \ldots, e_n$. Alors, pour tous $\sigma, \tau \in G_{\mathbb{Q}_p}$, on a $U_{\sigma\tau} = U_\sigma \sigma(U_\tau)$. Aussi, si $f_1, \ldots, f_n$ est une autre K-base, M est la matrice qui exprime la base $e_1, \ldots, e_n$ dans la base $f_1, \ldots, f_n$ et V_σ est la matrice correspondant à σ pour la base $f_1, \ldots, f_n$, alors $U_\sigma = M^{-1} V_\sigma \sigma(M)$. En particulier, la définition d'une représentation semi-linéaire continue ne dépend pas du choix de base.

Étant donné une représentation semi-linéaire continue de dimension d de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur un $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel W, on peut construire un opérateur $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-linéaire canonique φ sur un certain sous-$\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-espace vectoriel canonique W_∞ de W. Cet opérateur, et surtout sa classe de conjugaison, est un invariant important la représentation W. En particulier, sa classe de conjugaison détermine la classe d'isomorphisme de W comme représentation semi-linéaire.

Pour la construction de φ, notons que pour le $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$-espace vectoriel

$$\widehat{W}_\infty := \{w \in W : \sigma(w) = w \text{ pour tout } \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))\},$$

on a $\widehat{W}_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}} \mathbb{C}_p = W$ (voir [Sen80, Theorem 2]). L'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur W se restreint en une représentation semi-linéaire de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\widehat{W}_\infty$, qui se factorise par le quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$. Maintenant, si on définit W_∞ comme le sous-$\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-espace vectoriel formé des éléments w pour lesquels l'espace vectoriel $\langle \sigma(w), \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \rangle$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, on a $W_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}} = \widehat{W}_\infty$ (voir [Sen80, Theorem 3]). Ainsi, la représentation semi-linéaire W est complètement déterminée par l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ sur W_∞. On peut associer à cette dernière un opérateur canonique φ.

Théorème 2.8.3 ([Sen80, Theorem 4]). *Il existe un unique opérateur $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-linéaire sur W_∞ tel que pour tout $w \in W_\infty$, il existe un sous-groupe ouvert Γ_w avec*

$$\sigma(w) = \exp(\varphi \log \chi(\sigma)) w$$

pour tout $\sigma \in \Gamma_w$, où χ est le caractère cyclotomique et $\log$ *est le logarithme p-adique.*

L'opérateur φ est appelé l'opérateur de Sen de W. Explicitement, on a

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_p^\times$$

comme groupe topologiques, via le caractère cyclotomique. On a aussi que $\mathbb{Z}_p^\times$ se décompose comme un produit d'un groupe fini discret et de $\mathbb{Z}_p$. Fixons $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ un élément correspondant à un générateur de $\mathbb{Z}_p$. En particulier, tout élément du sous-groupe ouvert correspondant à cette copie de $\mathbb{Z}_p$ s'écrit comme γ^t pour un unique $t \in \mathbb{Z}_p$. Pour tout $w \in W_\infty$, on a

$$\varphi(w) = \frac{1}{\log \chi(\gamma)} \lim_{t\to 0} \frac{\gamma^t(w) - w}{t}. \tag{2.8.4}$$

En particulier, φ commute avec l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ sur W_∞. L'opérateur φ capture totalement la structure de représentation semi-linéaire sur W. Plus précisément, deux représentations semi-linéaires de dimension finie de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sont isomorphes si et seulement si leurs opérateurs de Sen sont similaires.

Les représentations semi-linéaires de $G_{\mathbb{Q}_p}$ auxquelles on s'intéresse principalement dans ce qui suit sont celles induites par des représentations (linéaires) de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$. Étant donné une représentation continue de dimension d de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur un E-espace vectoriel V, où E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on obtient une représentation semi-linéaire (continue) de dimension $d[E:\mathbb{Q}_p]$ sur $\mathbb{C}_p$ en considérant l'action diagonale de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $W := V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$. W est un $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$-module libre de rang d par construction. Il est aussi clair de la construction que $\widehat{W}_\infty$ et W_∞ sont des modules sur $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ et $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ respectivement. Ils sont même libres de rang d.

Lemme 2.8.5. *$\widehat{W}_\infty$ et W_∞ sont des modules libres de rang d sur $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ et $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ respectivement.*

Démonstration. Pour toute extension de corps $F/\mathbb{Q}_p$, l'anneau $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ est un produit fini d'extensions algébriques de F. Un module de type fini sur un produit de corps $A = \prod_{i=1}^k F_i$ est de la forme $M = \prod_{i=1}^k V_i$, où V_i est un F_i-espace vectoriel de dimension finie, et M est libre de rang d exactement si $\dim_{F_i} V_i = d$ pour tout i. Si tous les F_i sont des extensions finies d'un corps F et L est une extension arbitraire de F, alors $F_i \otimes_F L$ est un produit fini d'extensions finies de L, donc

$$(\prod_{i=1}^k F_i) \otimes_F L$$

est un produit fini d'extensions algébriques de L. De plus, $V_i \otimes_F L$ est un produit d'espaces vectoriels de dimension $\dim_{F_i} V_i$ sur chacun des corps apparaissant dans $F_i \otimes_F L$. En particulier, M est libre de rang d si et seulement si $M \otimes_F L$ l'est. Dans notre cas, on a

$$(E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})) \otimes_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}} = E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}},$$

$$(E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}} \mathbb{C}_p = E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p,$$

et
$$W_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})} \mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}} = \widehat{W}_\infty, \qquad \widehat{W}_\infty \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}} \mathbb{C}_p = W.$$
Par la discussion précédente, comme W est libre de rang d sur $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$, il suit que W_∞ et $\widehat{W}_\infty$ sont aussi libres de même rang.

□

Enfin, notons que par (2.8.4), φ est un morphisme de $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-modules sur W_∞. Par le lemme 2.8.5, en choisissant une base, φ est donné par une matrice dans $M_{n\times n}(E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$, qui possède un polynôme caractéristique $P \in E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})[X]$, appelé le polynôme de Sen de la représentation V. Celui-ci est en fait dans $E[X]$.

Lemme 2.8.6. *Le polynôme P appartient au sous-anneau $E[X]$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\sigma(P) = P$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$, où l'action est celle induite par l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$. Fixons une $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-base $e_1, \ldots, e_n$ de W_∞, et soit M la matrice correspondant à φ dans cette base. Il est clair de la définition que si $U_\sigma \in \mathrm{GL}_n(E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$ est la matrice dont la i-ième colonne est donnée par les coordonnées de $\sigma(e_i)$ dans la base $e_1, \ldots, e_n$, alors la matrice correspondant à $\varphi \circ \sigma$ est MU_σ, tandis que celle de $\sigma \circ \varphi$ est $U_\sigma \sigma(M)$. Comme φ commute avec l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$, il suit que $\sigma(M) = U_\sigma^{-1} M U_\sigma$. Par conséquent, le polynôme caractéristique de $\sigma(M)$, qui est $\sigma(P)$, est égal au polynôme caractéristique de M, qui est P, comme voulu.

□

Il suit du lemme 2.8.6 que les racines du polynôme caractéristique de φ sont bien définies pour chaque choix de plongement de E dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

Définition 2.8.7. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines du polynôme caractéristique de
$$\varphi \in M_{n\times n}(E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})),$$
comptées avec multiplicité. $-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$ sont appelées les poids de Hodge-Tate-Sen de la représentations V.

Il suit de la définition que remplacer le corps E par une extension finie plus grande de $\mathbb{Q}_p$ préserve les poids de Hodge-Tate-Sen.

Le nom de poids de Hodge-Tate-Sen peut s'expliquer de la façon suivante. Étant donnée W une représentation semi-linéaire continue de dimension n de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathbb{C}_p$, si on voit l'opérateur φ comme un opérateur $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-linéaire sur le $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$-espace vectoriel W_∞, alors on peut encore une fois parler des n racines de son polynôme caractéristique, par un argument analogue à celui de la preuve du lemme 2.8.6. On dit que la représentation W est de Hodge-Tate de poids $k_1, \ldots, k_n$ s'il existe une décomposition
$$W = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}_p(-k_i)$$

comme représentations semi-linéaires, où $\mathbb{C}_p(-k_i)$ est la représentation semi-linéaire de dimension 1 telle qu'il existe un générateur v pour lequel tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ agit par multiplication par $\chi^{-k_i}(\sigma)$. Une représentation semi-linéaire W de dimension n est de Hodge-Tate de poids $k_1, \ldots, k_n$ si et seulement si l'opérateur de Sen de W est semi-simple et ses valeurs propres (comptées avec multiplicité) sont $-k_1, \ldots, -k_n$ (voir [Sen80, p. 101]).

Remarque 2.8.8. Soit $\mathbb{C}_p[T, T^{-1}]$ où $G_{\mathbb{Q}_p}$ agit sur T^k par multiplication par le caractère χ^k et sur $\mathbb{C}_p$ via son action habituelle. Soit V une représentation (linéaire) de dimension n de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On a une décomposition

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p[T, T^{-1}] = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p T^k,$$

qui respecte l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$. En prenant les éléments $G_{\mathbb{Q}_p}$-invariants, on obtient un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel gradué

$$(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p[T, T^{-1}])^{G_{\mathbb{Q}_p}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k,$$

où $V_k = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p T^k)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$. Alors $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ est de Hodge-Tate si et seulement si $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p[T, T^{-1}])^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ est de dimension n sur $\mathbb{Q}_p$, et ses poids de Hodge-Tate sont exactement les k tels que $V_k \neq 0$, avec multiplicité donnée par la dimension de V_k. Cela explique notre convention de signe dans la définition des poids de Hodge-Tate-Sen.

Étant donnée une représentation continue de $G_{\mathbb{Q}}$ sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, on obtient une représentation continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$ par restriction à un sous-groupe de décomposition. Elle est bien définie à isomorphisme près. On peut donc lui associer un opérateur de Sen et des poids de Hodge-Tate-Sen. Il suit de [Fal87] que les représentations associées à des formes propres classiques de poids k ont pour poids de Hodge-Tate-Sen 0 et $k-1$. De plus, on peut montrer que le déterminant de la représentation associée à une forme propre surconvergente de poids k est de poids de Hodge-Tate-Sen $k-1$. Cela peut être déduit de la définition 2.6.6 par un calcul de l'action de S_ℓ/ℓ, que nous ne ferons pas ici comme nous n'avons pas défini l'action de l'algèbre de Hecke de façon explicite.

L'opérateur de Sen et les poids de Hodge-Tate-Sen se comportent bien sous plusieurs constructions classiques de la théorie des représentations.

Lemme 2.8.9. *Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.*

(1) *Pour une représentation continue de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur un E-espace vectoriel V de dimension finie et $V' \subseteq V$ une sous-représentation (i.e., un sous-espace vectoriel qui est $G_{\mathbb{Q}_p}$-invariant), on a $W'_\infty = W_\infty \cap W'$ et l'opérateur de Sen de V' est donné par la restriction de l'opérateur de Sen de V. Aussi, pour $W'' = (V/V)' \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$, on a $W''_\infty = W_\infty / W'_\infty$ et l'opérateur de Sen de $(V/V)'$ est l'endomorphisme sur W''_∞ induit par l'opérateur de Sen de V.*

(2) *Soient des représentations continues de dimension finie de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur des espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_n$ sur E.*

(a) *Pour $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ avec l'action diagonale, on a $W_\infty = (W_1)_\infty \oplus \ldots \oplus (W_n)_\infty$, et l'opérateur de Sen de V est la somme directe des opérateurs de Sen des V_i.*

(b) *Pour $V = V_1 \otimes_E \ldots \otimes_E V_n$ avec l'action diagonale, on a $W_\infty = (W_1)_\infty \otimes_{E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})} \ldots \otimes_{E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})} (W_n)_\infty$, si l'opérateur de Sen de V_i est φ_i, l'opérateur de Sen de V est donné par*

$$\varphi_1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes \varphi_2 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \varphi_n.$$

(3) *Pour $V' = \Lambda^r(V)$ la représentation donnée (par exemple) par la restriction de la représentation de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $V'' = V^{\otimes r}$ au sous-espace engendré par les éléments de la forme*

$$\frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \mathrm{sgn}(\tau) v_{\tau(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\tau(r)},$$

pour $v_1, \ldots, v_r \in V$, le module W'_∞ s'identifie au sous-module de $W''_\infty = W_\infty^{\otimes r}$ engendré par les éléments de la forme

$$\frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \mathrm{sgn}(\tau) m_{\tau(1)} \otimes \ldots \otimes m_{\tau(n)}$$

pour $m_1, \ldots, m_n \in W_\infty$.

(4) *Si V' est la semi-simplification de V, alors V et V' ont le même polynôme de Sen.*

Démonstration. Les identifications des "W_∞" suivent directement de la définition de ce sous-espace et de comparaison de dimensions sur $\mathbb{Q}_p(\mu_p^\infty)$. Les assertions (1) et (2) suivent de (2.8.4) et d'un argument par récurrence. Le point (3) est une combinaison de (1) et (2)(b). Enfin, le point (4) suit de (1) et (2)(a) et du fait que si ψ est un endomorphisme d'un espace vectoriel V_1 qui préserve un sous-espace V_2 et P_i est le polynôme caractéristique de $\varphi|_{V_i}$, alors P_2 divise P_1 et le polynôme caractéristique de ψ sur V_1/V_2 est P_1/P_2. □

Remarque 2.8.10. Étant donné une représentation continue V de $G_{\mathbb{Q}}$ ou de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur un espace de dimension n sur une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$, son déterminant, vu comme un caractère continu ou une représentation continue de dimension 1, est donné par $\Lambda^n(V)$. Il suit du lemme 2.8.9 que l'opérateur de Sen associée est donnée par la multiplication par la trace de l'opérateur de Sen de V. En particulier, pour une représentation de dimension 2 associée à une forme propre surconvergente de poids k, la somme des poids de Hodge-Tate-Sen est $k-1$.

Enfin, on peut définir une notion d'opérateur et de polynôme de Sen pour des représentations (linéaires) continues $\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach (cf. [Sen88], [Sen93]). À une telle représentation, on peut attacher un opérateur de Sen $\varphi \in M_{n\times n}(\mathcal{R}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p}\mathbb{C}_p)$, et son polynôme de Sen. Voici une liste de propriétés importantes de φ.

(1) Les opérateurs de Sen de deux représentations $\rho, \rho' : G_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathcal{R})$ sont conjugués si et seulement s'il existe un sous-groupe ouvert $U \subseteq G_{\mathbb{Q}_p}$ tel que $\rho|_U \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ et $\rho|'_U \widehat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ sont isomorphes comme représentations semi-linéaires (défini de la façon évidente). [Sen93, p. 30]

(2) Pour tout choix de $\mathcal{R}$, la matrice φ est conjuguée à un élément de $M_{n\times n}(\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Q}_p} F)$ pour F une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. En particulier, son polynôme caractéristique est dans ce même anneau. [Sen93, p. 30]

(3) Si $\mathcal{R}'$ est une autre $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach et $\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ est un morphisme continu de $\mathbb{Q}_p$-algèbres, alors $\varphi_{\mathcal{R}'} = \lambda(\varphi_{\mathcal{R}})$ (et donc similairement pour les polynômes de Sen). [Sen93, p. 29]

Chapitre 3

Actions localement analytiques

3.1 Actions localement analytiques

La notion clé introduite dans [Pan25] est celle d'action localement analytique d'un anneau (abstrait) sur un espace de Banach p-adique. Dans le chapitre 4, on montre théorème 1.0.3 en utilisant le fait que l'action de l'algèbre de Hecke sur certains espaces de formes modulaires surconvergentes est localement analytique selon cette définition.

Définition 3.1.1. Soit W un espace de Banach sur $\mathbb{Q}_p$.

(1) Une application linéaire continue $T : W \longrightarrow W$ est dite localement analytique s'il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}_p[X]$ tel que l'opérateur $P(T)$ envoie la boule unité fermée $W_0 \subseteq W$ dans pW_0.

(2) Soit A un anneau (pas forcément commutatif) muni d'une action linéaire sur W. On dit que cette action est localement analytique s'il existe un réseau ouvert et borné $\mathcal{L}$ qui est stable sous l'action de A tel que pour tout $n \geq 1$, l'image de A dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(\mathcal{L}/p^n\mathcal{L})$ est un anneau fini.

Remarque 3.1.2. Voici quelques remarques sur ces définitions.

(1) Dans la partie (1) de la définition, dans le cas où T est localement nilpotent, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} T^n v = 0$ pour tout $v \in W$, si T est localement analytique, on peut prendre le polynôme P de la forme T^m. En effet, on a un polynôme $P(T)$ tel que $p(T)(W_0) \subseteq pW_0$. Si on réduit modulo p, on trouve que $\overline{P}(T) = 0$ comme endomorphisme de W_0/pW_0, où $\overline{P}$ est la réduction modulo p de P. On peut décomposer $\overline{P}(X) = X^n \overline{P}_0(X)$, où X ne divise pas $\overline{P}_0(X)$. Soit $P_0(X)$ un relèvement de $\overline{P}_0(X)$ dans $\mathbb{Z}_p[X]$. On a $P_0(X) = a_0 + Q(X)$ où Q a pour terme constant 0 et a_0 est inversible modulo p. Pour tout $k \geq 1$, en multipliant $P_0(X)$ par un polynôme $R_k(X)$, on obtient $P_0(X)R_k(X) = a_0^{2^k} - Q(X)^{2^k}$. En particulier, comme T est topologiquement nilpotent, pour tout $v \in W_0$, on peut trouver un entier 2^k tel que $T^\ell v \in pW_0$ pour tout $\ell \geq 2^k$. Il suit que

$$0 = T^n \overline{P_0}(T)\overline{R_k}(T)v_0 = a_0^{2^k} T^n v_0,$$

et donc $T^n v_0 = 0$. Comme v_0 était arbitraire, on a que T^n est 0 comme endomorphisme de W_0/pW_0. Ainsi, d'une certaine façon, la notion de localement analytique permet de passer de la convergence faible vers 0 de la suite $(T^n)_n$ à la convergence forte.

(2) La partie (2) de la définition ne dépend pas vraiment du choix de $\mathcal{L}$. En effet, si $\mathcal{L}'$ est un autre réseau stable sous l'action de A, alors il existe des entiers k_1 et k_2 tels que

$$p^{k_2}\mathcal{L}' \subseteq p^{k_1}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'.$$

Le noyau du morphisme $A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(\mathcal{L}'/p^n\mathcal{L}')$ est l'ensemble des $a \in A$ tels que $a\mathcal{L}' \subseteq p^n\mathcal{L}'$. Mais c'est certainement le cas pour tous les $a \in A$ avec $a\mathcal{L} \subseteq p^{n+k_2}\mathcal{L}$, c'est-à-dire ceux dans le noyau de $A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}/p^{n+k_2}\mathbb{Z}}(\mathcal{L}/p^{n+k_2}\mathcal{L})$.

(3) Dans le cas où A est noethérien dans la partie (2) de la définition, il suffit de vérifier le résultat pour $n = 1$. En effet, si I_n est le noyau du morphisme $A \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{L}/p^n\mathcal{L})$, on a que $A/I_1^n \twoheadrightarrow A/I_n$, et donc il suffit de montrer que A/I_1^n est fini. Or, si A est noethérien, I_1 est de type fini sur A et on a la filtration

$$0 \subseteq I_1^{n-1}/I_1^n \subseteq \ldots \subseteq I_1/I_1^n \subseteq A/I_1^n$$

dont les quotients des termes successifs $(I_1^{m-1}/I_1^n)/(I_1^m/I_1^n) = I_1^{m-1}/I_1^m$ pour $1 \leq m \leq n-1$ sont de type fini sur A/I_1^m, et sont donc des ensembles finis par récurrence.

(4) Si l'action de A satisfait la partie (2) de la définition et son action préserve la boule unité fermée, alors l'endomorphisme linéaire donné par l'action de tout $a \in A$ est localement analytique dans le sens de la partie (1).

Si W est de dimension finie, tout opérateur de norme ≤ 1 est automatiquement localement analytique (par le théorème de Cayley-Hamilton). Un autre exemple intéressant est le cas où W est un espace vectoriel sur, disons, $\overline{\mathbb{Q}_p}$, et $A = \mathcal{O}_E[[X_1, \ldots, X_r]]$ pour E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et où les opérateurs X_i sont topologiquement nilpotents. Par le point (1) de la remarque 3.1.2, il existe un n tels que $X_i^n W_0 \subseteq pW_0$ pour tout i. On a alors que l'action de A s'étend en une action de $E'\langle X_1/p^{1/n}, \ldots, X_r/p^{1/n}\rangle$, où E' est une extension finie de E contenant une racine n-ième de p.

3.2 Faux invariants de Hasse

Considérons l'algèbre de Hecke $\mathbb{T} = \mathbb{T}_{K^p} := \mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)//K^p]$. Le but de cette section est d'établir que l'action de $\mathbb{T}$ sur l'espace de Banach sur $\mathbb{C}_p$ des sections du faisceau inversible $\omega_{K_pK^p}$ sur certains ouverts de $\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$ est localement analytique, dans le sens de la définition 3.1.1. Dans la section 4, on en déduit le théorème 1.0.3. Pour montrer que l'action de $\mathbb{T}$ est localement analytique, on utilise l'existence du morphisme des périodes de Hodge-Tate du théorème 2.5.2 qui permet de construire un modèle entier formel de $\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$ et d'exploiter les propriétés de la courbe modulaire perfectoïde "au niveau fini", c'est-à-dire à un niveau K^pK_p.

Lemme 3.2.1. *Fixons $K^p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ un sous-groupe ouvert et compact contenu dans U_N pour $N \geq 3$ premier à p. Pour tout sous-groupe ouvert et compact $K_p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ suffisamment petit, il existe un schéma formel projectif $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ muni d'un recouvrement affine $\mathfrak{D}_{K^pK_p,1}, \mathfrak{D}_{K^pK_p,2}$ et d'un faisceau inversible ample $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ naturels qui vérifient les propriétés suivantes.*

(1) *$\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ est un modèle entier formel de $\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$, c'est-à-dire que $\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$ est la fibre générique de $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$.*

(2) *La fibre générique de $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$ est $V_{K^pK_p,i}$ (cf. section 2.5).*

(3) *La fibre générique de $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ est $\omega_{K_pK^p}$.*

(4) *Les actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ sur*

$$\mathrm{colim}_{K^p\to 1} H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}),\ \mathrm{colim}_{K^p\to 1} H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$$

et les actions de $\mathbb{T}$ sur

$$H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}),\ H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$$

(cf. remarque 2.6.3) préservent

$$\mathrm{colim}_{K^p\to 1} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}),\ \mathrm{colim}_{K^p\to 1} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}),$$

et

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}),\ H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$$

respectivement. On a aussi une action à gauche naturelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ sur

$$\mathrm{colim}_{K^p\to 1} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$$

et une action de $\mathbb{T}$ sur

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$$

pour tout $n \geq 1$.

(5) *Pour tout $n \geq 1$ et tout K_p suffisamment petit en fonction de n et de K^p, il existe des sections globales $\overline{s}_{n,1}, \overline{s}_{n,2}$, appelées les faux invariants de Hasse, telles que $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$ est l'ouvert où $\overline{s}_{n,i}$ est inversible, et telles que $\overline{s}_{n,i}$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$-invariante, et la multiplication par $\overline{s}_{n,i}$ commute avec l'action de $\mathbb{T}$.*

(6) *$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ s'identifie à la boule unité de $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ pour un choix naturel de norme qui fait de $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}_p$.*

Démonstration. Considérons le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ sur $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}}$, muni de ses sections globales habituelles x_1, x_2. Par la partie (2) théorème 2.5.2, on a une identification naturelle $\pi^*_{K^pK_p}\omega_{K^pK_p} = \pi^*_{\mathrm{HT}}\mathcal{O}(1)$. Soient e_1 et e_2 les sections globales de $\pi^*_{\mathrm{HT}}\mathcal{O}(1)$ obtenues en tirant en arrière x_1 et x_2. Soient $V_{K^p,1}, V_{K^p,2}$ les ouverts définis par les conditions $|e_2/e_1| \leq 1$ et $|e_1/e_2| \leq 1$ respectivement (de façon équivalente, les préimages des ouverts donnés par $|x_2/x_1| \leq 1$ et $|x_1/x_2| \leq 1$). Définissons $V_{K^p,\{1,2\}}$ comme l'intersection $V_{K^p,1} \cap V_{K^p,2}$.

Alors, par la partie (4) du théorème 2.5.2, pour $\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\}$ il existe un système d'ouverts affinoïdes $V_{K^pK_p,J}$ tels que

$$\mathcal{X}^*_{K^p} \sim \lim_{K_p \to 1} \mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$$

se restreint en

$$V_{K^p,J} \sim \lim_{K_p \to 1} V_{K^pK_p,J}.$$

On a que e_i est inversible sur $V_{K^p,i}$. Soit $n \geq 1$. Par densité, pour K_p suffisamment petit, il existe des

$$\begin{aligned} s_{n,i} &\in H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega_{K^pK_p}) \\ x_{n,i} &\in H^0(V_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{K^pK_p}}) \end{aligned}$$

tels que

$$|1 - s_{n,i}/e_i| \leq |p^n| \tag{3.2.2}$$

et

$$|e_{3-i}/e_i - x_{n,i}| \leq |p^n|, \tag{3.2.3}$$

sur l'ouvert $V_{K^p,i}$. On a alors des sections $s_{n,i}, s_{n,i}x_{n,i} \in H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega_{K^pK_p})$ avec $s_{n,i}$ inversible et $|s_{n,i}x_{n,i}/s_{n,i}| = |x_{n,i}| \leq 1$ sur $V_{K^pK_p,i}$ pour $i = 1, 2$. De plus, on a que $V_{K^pK_p,\{1,2\}}$ est défini par la condition $|x_{n,i}| = 1$ dans $V_{K^pK_p,i}$. Ainsi, par [Sch15, Lemma II.1.1], les morphismes naturels

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}}(V_{K^pK_p,\{1,2\}})) \longrightarrow \mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}}(V_{K^pK_p,i}))$$

sont des immersions ouvertes, et les $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i} := \mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}}(V_{K^pK_p,i}))$ pour $i = 1, 2$ se recollent le long de $\mathfrak{D}_{K^pK_p,\{1,2\}} := \mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}}(V_{K^pK_p,\{1,2\}}))$ pour former un schéma formel projectif $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ dont la fibre générique est $\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$. De plus, il existe un unique faisceau inversible (à isomorphisme canonique près) $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ sur $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ dont la fibre générique est $\omega_{K^pK_p}$ tel que

$$s_{n,i}, s_{n,i}x_{n,i} \in H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}) \subseteq H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})[1/p^n] = H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega_{K^pK_p})$$

et $s_{n,i}$ est inversible sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})$ (et cet unique faisceau est ample). Il existe aussi des sections globales uniques $\overline{s}_{n,i} \in H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}/p^n)$ qui satisfont

$$\overline{s}_{n,i}|_{\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}} \equiv s_{n,i} \bmod p^n$$

et

$$\overline{s}_{n,i}|_{\mathfrak{D}_{K^pK_p,3-i}} \equiv s_{n,3-i}x_{n,3-i} \bmod p^n.$$

En particulier, $\overline{s}_{n,i}$ est inversible exactement sur $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$.

On montre que ces constructions ne dépendent pas des choix de $s_{n,i}, x_{n,i}$, et que $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ et $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ ne dépendent pas de n. Pour $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$, c'est clair par construction. Pour $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$, on remarque que pour tout autre choix $s'_{n,i}, x'_{n,i}$, on a

$$\left|\frac{s'_{n,i}}{s_{n,i}}\right| = \left|\frac{s'_{n,i}}{e_i}\frac{e_i}{s_{n,i}}\right| \leq 1$$

sur $V_{K^p,i}$ (et donc sur $V_{K^pK_p,i}$), donc $s'_{n,i}/s_{n,i} \in \mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}}(V_{K^pK_p,i})$, et c'est même un élément inversible, d'inverse $s_{n,i}/s'_{n,i}$. Similairement, $(s'_{n,i}x'_{n,i})/(s_{n,i}x_{n,i})$ est un élément inversible de $\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}}(V_{K^pK_p,i})$. Ainsi, par l'unicité, $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ est le même faisceau, qu'il soit définit à partir des $s_{n,i}, x_{n,i}$ ou des $s'_{n,i}, x'_{n,i}$. En particulier, tout choix de "$s_{n,i}, x_{n,i}$" donne aussi un choix de "$s_{m,i}, x_{m,i}$" pour $m \leq n$, donc la construction de $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ ne dépend pas de n. Enfin, pour les $\overline{s}_{n,i}$, cela vient du fait que pour tout choix de $s_{n,i}$, on a $s_{n,i} \equiv e_i \bmod p^n$ sur $V_{K^p,i}$ et $s_{n,3-i}x_{n,3-i} \equiv e_i \bmod p^n$ sur U_{3-i}. Cela montre les points (1), (2) et (3). Pour le point (6), la multiplication par n'importe quel choix de $s_{n,i}$ donne un isomorphisme

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}) \longrightarrow H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}).$$

On a le résultat voulu en prenant la norme correspondant à la norme supremum (comme variété analytique rigide) sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}})$.

Le fait que les $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$, $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$, $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ et $\overline{s}_{n,i}$ soient canoniques permet de montrer (4) et (5). En effet, pour $\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\}$, les isomorphismes $[g] : V_{gK^pg^{-1}K_p,J} \longrightarrow V_{K^pK_p,J}$ (cf. théorème 2.5.2 (3)) sont données par des isomorphismes d'anneaux topologiques

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p}}(V_{K^pK_p,J}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p}}(V_{gK^pg^{-1}K_p,J})$$

qui se restreignent en des isomorphismes d'anneaux topologiques

$$\mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p}}(V_{K^pK_p,J}) \longrightarrow \mathcal{O}^+_{\mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p}}(V_{gK^pg^{-1}K_p,J}).$$

Cela définit un isomorphisme $[g] : \mathfrak{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p} \longrightarrow \mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ de schémas formels sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ dont la fibre générique est $[g] : \mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p,\mathbb{C}_p} \longrightarrow \mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$. La fibre générique du faisceau inversible $[g]^*\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ sur $\mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p}$ est $[g]^*\omega_{K^pK_p}$, et pour $\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\}$, on a

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,J}, [g]^*\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}) \subseteq H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,J}, [g]^*\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})\left[\frac{1}{p}\right] = H^0(V_{K^pK_p,J}, [g]^*\omega_{K^pK_p}).$$

L'isomorphisme $g : [g]^*\omega_{K^pK_p} \longrightarrow \omega_{gK^pg^{-1}K_p}$ induit des isomorphismes compatibles de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p,\mathbb{C}_p}}(V_{gK^pg^{-1}K_p,J})$-modules

$$H^0(V_{gK^pg^{-1}K_p,J}, [g]^*\omega_{K^pK_p}) \longrightarrow H^0(V_{gK^pg^{-1}K_p,J}, \omega_{gK^pg^{-1}K_p})$$

pour $\varnothing \neq J \subseteq \{1,2\}$. Les images M_J de $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,J}, [g]^*\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})$ à travers ces isomorphismes se recollent en un faisceau inversible ω sur $\mathfrak{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p}$, dont la fibre générique est, par construction, $\omega_{gK^pg^{-1}K_p}$. Pour montrer qu'on a une identification canonique entre ω et $\omega^{\mathrm{int}}_{gK^pg^{-1}K_p}$, il reste à montrer que les éléments

$$g \cdot s_{n,i} \in H^0(\mathfrak{D}_{gK^pg^{-1}K_p,i}, \omega) \subseteq H^0(V_{gK^pg^{-1}K_p,i}, \omega_{gK^pg^{-1}K_p})$$

et

$$g \cdot x_{n,i} \in H^0(V_{gK^pg^{-1}K_p,i}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{gK^pg^{-1}K_p^*}}),$$

satisfont (3.2.2) et (3.2.3) (avec $g \cdot s_{n,i}$ à la place de $s_{n,i}$ et $g \cdot x_{n,i}$ à la place de $x_{n,i}$). Or, cela suit du fait que, pour K^p suffisamment petit en terme de g, on a un diagramme commutatif d'espaces adiques

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1}K_p,\mathbb{C}_p} \arrow[d, "{[g]}"'] & \mathcal{X}^*_{gK^pg^{-1},\mathbb{C}_p} \arrow[l, "\pi_{gK^pg^{-1}K_p}"'] \arrow[r, "\pi_{\mathrm{HT}}"] \arrow[d, "{[g]}"'] & (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}} \\
\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p} & \mathcal{X}^*_{K^p,\mathbb{C}_p} \arrow[l, "\pi_{K^pK_p}"] \arrow[ur, "\pi_{\mathrm{HT}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Cela montre que l'action à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ sur la tour des $(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega_{K^pK_p})$ est la fibre générique d'une action sur la tour des $(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})$. En particulier, les actions de $\mathbb{T}$ sur $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ et $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ se restreignent à $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ et à $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ pour $i = 1,2$. On peut aussi définir une action de $\mathbb{T}$ sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$ de la même façon. Cela montre (4).

Enfin, par un argument similaire à précédemment, on voit que $\overline{s}_{n,i}$ est $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$-invariant. Cela implique que la multiplication par $\overline{s}_{n,i}$ commute avec l'action de l'algèbre de Hecke sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$, et sur

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n) = H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n.$$

En effet, pour un élément $[K^pgK^p] \in \mathbb{T}$ et une section $t \in H^0(U, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n$ pour $U = \mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ ou $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$, si $K^pgK^p = g_1gK^p \sqcup \ldots g_ngK^p$, on a

$$[K^pgK^p](t \otimes \overline{s}_{n,i}) = \sum_{i=1}^n g_ig \cdot t \otimes \overline{s}_{n,i} = \left(\sum_{i=1}^n g_ig \cdot t\right) \otimes \overline{s}_{n,i} = ([K^pgK^p]t) \otimes \overline{s}_{n,i},$$

ce qui montre (5).

$\square$

Remarque 3.2.4. Comme $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ est ample, pour tout k suffisamment grand, on a

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n) = H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n.$$

Il suit de la construction que sous cette identification, l'action de $\mathbb{T}$ sur ce module est celle induite par l'action de $\mathbb{T}$ sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$. Un résultat similaire est vrai pour l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^p_f)$.

À partir de maintenant, on fixe K^p et on suppose que K_p est suffisamment petit pour que $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ et $\overline{s}_{1,i}$ existent. On montre que l'action de l'algèbre de Hecke sur tous les $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ est localement analytique, pour $i = 1, 2$. Par le lemme 3.2.1, le réseau $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$, qui correspond à la boule unité de $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K_pK^p})$ pour une norme naturelle, est stable sous l'action de $\mathbb{T}$. On montre le résultat suivant.

Théorème 3.2.5. *Pour $i = 1, 2$, l'action de $\mathbb{T}$ sur l'espace de Banach p-adique*

$$\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\Big) \otimes_{Z_p} \mathbb{Q}_p$$

muni de la norme donnée par $\|(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\|a_k\|_k$, où $\|\cdot\|_k$ est la norme donnée par la partie (6) *du lemme 3.2.1 sur $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K_pK^p})$, est localement analytique.*

Démonstration. D'abord, comme $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$ est un schéma formel affine, le foncteur des sections globales est exact, donc on a une identification

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n = H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n).$$

Ensuite, pour $K'_p \subseteq K_p$, on a une application $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-linéaire et $\mathbb{T}$-équivariante

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n) \longrightarrow H^0(\mathfrak{D}_{K^pK'_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK'_p})^{\otimes k}/p^n).$$

Cette application est injective. En effet, comme la multiplication par p est injective sur les modules $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ et $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK'_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK'_p})^{\otimes k})$, il suffit de montrer le résultat pour $n = 1$. Comme $\overline{s}_{n,1}$ est inversible sur $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$ et $\mathfrak{D}_{K^pK'_p,i}$, on se réduit au cas $k = 0$. Dans ce cas, on a l'injectivité car les morphismes $V_{K^pK'_p,i} \longrightarrow V_{K^pK_p,i}$ sont surjectifs et les courbes modulaires sont réduites. Ces applications induisent des injections $\mathbb{T}$-équivariantes

$$\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}) \longrightarrow \prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK'_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK'_p})^{\otimes k}).$$

Ainsi, on peut supposer que K_p suffisamment petit pour que les faux-invariants de Hasse $\overline{s}_{n,i}$, $i = 1, 2$, existent.

Comme $\overline{s}_{n,i}$ est inversible sur $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$ et la multiplication par $\overline{s}_{n,i}$ est $\mathbb{T}$-équivariante, on a que

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p^n) \xrightarrow{\times\overline{s}^k_{n,i}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-modules qui est $\mathbb{T}$-équivariant, et donc on se réduit au cas $k = 0$. Maintenant, on a

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{K^pK_p}}/p^n) = \operatorname*{colim}_{\times \overline{s}_{n,i}} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n), \tag{3.2.6}$$

où le côté droit de (3.2.6) est la colimite du diagramme

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p^n) \xrightarrow{\times \overline{s}_{n,i}} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}/p^n) \xrightarrow{\times \overline{s}_{n,i}} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes 2}/p^n) \xrightarrow{\times \overline{s}_{n,i}} \cdots$$

Cela suit du fait que $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ est un schéma formel sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$ qui admet un recouvrement par des ouverts affines formels dont l'intersection est un ouvert affine formel, et qu'un faisceau d'idéaux de définition pour celui-ci est $p^n\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}$, par construction. Cela implique que l'espace annelé $(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p^n)$ est un schéma quasi-compact et quasi-séparé sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ est un faisceau inversible sur ce schéma et $\overline{s}_{n,i}$ est inversible exactement sur $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$. L'identification voulue est alors un résultat classique de la théorie des schémas.

Comme $\times\overline{s}_{n,i}$ est $\mathbb{T}$-équivariant, l'action de $\mathbb{T}$ sur chacun des $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$, $k \geq 0$, induit une action de $\mathbb{T}$ sur leur colimite, et l'identification (3.2.6) est compatible avec ces actions. Ainsi, il suffit de montrer que

(1) L'image de $\mathbb{T}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n))$ est un ensemble fini pour tout $k \geq 0$ suffisamment grand, et

(2) Le noyau $\ker_k$ de

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n))$$

vérifie $\ker_{k+1} \supseteq \ker_k$ pour tout k suffisamment grand.

En effet, notons que l'action de $\mathbb{T}$ sur le côté droit de (3.2.6) ne dépend que son action sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$ pour tous les k suffisamment grands, par la propriété universelle des colimites. Ainsi, si k_0 est suffisamment grand pour que l'image de $\mathbb{T}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k_0}/p^n))$ soit un ensemble fini et que pour tout $k \geq k_0$, on a

$$\ker_k \supseteq \ker_{k-1} \supseteq \ldots \supseteq \ker_{k_0},$$

alors le morphisme $\mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n))$ se factorise par $\mathbb{T}/\ker(k_0)$ pour tout $k \geq k_0$, qui est un ensemble fini, comme il est en bijection avec l'image de $\mathbb{T}$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k_0}/p^n))$.

Pour montrer (1), notons que puisque $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ est ample et est sans p^n-torsion par construction, pour tout k suffisamment grand, on a $H^1(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}) = 0$, et donc

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n) = H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n.$$

Comme l'action de $\mathbb{T}$ sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n$ est induite par l'action de $\mathbb{T}$ sur le module $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ (cf. remarque 3.2.4), il suffit de montrer que l'image de $\mathbb{T}$ dans

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})) \tag{3.2.7}$$

est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini. En effet, alors, l'action de $\mathbb{T}$ sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n$ se factorise par une action de la réduction modulo p^n de l'image de $\mathbb{T}$ dans (3.2.7), qui est un $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-module de type fini. Le $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-module $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ est sans p-torsion, donc on a

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})).$$

L'intérêt d'être passé aux sections globales est que, comme $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}$ et $\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}$ sont propres sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ et $\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ respectivement, $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ et $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ est un $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Aussi, on a

$$H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}) = H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p,$$

et, par construction, l'action de $\mathbb{T}$ sur $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ est obtenue par changement de base de celle sur $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$. Il suit que $\mathrm{im}(\mathbb{T}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Si on munit $\mathrm{im}(\mathbb{T}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p}))$ de la norme d'opérateur (pour n'importe quel choix de norme sur $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$), on a donc que $\mathrm{im}(\mathbb{T})$ est un $\mathbb{Z}_p$-sous-module borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, ce qui implique que $\mathrm{im}(\mathbb{T})$ est lui-même un module de type fini sur $\mathbb{Z}_p$ (voir le lemme 3.2.10).

Enfin, pour (2), notons que comme $\overline{s}_{n,1}, \overline{s}_{n,2}$ engendrent globalement $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$, on a une suite exacte

$$0 \to (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k-1}/p^n \overset{(\overline{s}_{n,1},\overline{s}_{n,1})}{\to} ((\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)^{\oplus 2} \overset{(\overline{s}_{n,2},-\overline{s}_{n,1})}{\to} (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+1}/p^n \to 0. \tag{3.2.8}$$

En effet, l'injectivité du premier morphisme est claire. Pour l'exactitude à droite, par exemple, $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}/p^n$ est un faisceau inversible engendré par deux sections globales, donc il induit un morphisme de schémas

$$(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K^pK_p}}/p^n) \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$$

pour lequel $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ est obtenu en tirant en arrière $\mathcal{O}(1)$. La suite exacte (3.2.8) est obtenue en tirant en arrière puis en tensorisant avec $(\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}$ la suite exacte habituelle

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus 2}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}}(1) \longrightarrow 0.$$

Comme $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ est ample et n'a pas de p^n-torsion, il suit que $H^1(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k-1}/p^n) = 0$ pour k suffisamment grand (cela suit de la suite exacte longue en cohomologie), donc, en prenant les sections globales, on obtient une suite exacte

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)^{\oplus 2} \overset{(\overline{s}_{n,2},-\overline{s}_{n,1})}{\longrightarrow} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+1}/p^n) \longrightarrow 0,$$

et, comme les $\overline{s}_{n,i}$ sont $\mathbb{T}$-invariants, le premier morphisme est $\mathbb{T}$-équivariant. En particulier, si $T \in \mathbb{T}$ agit par 0 sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$, il agit aussi de façon nulle sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+1}/p^n)$.

Pour obtenir le résultat tel que formulé dans l'énoncé du théorème, on remarque que, pour le réseau

$$L := \prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}) \subseteq \Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\Big) \otimes_{Z_p} \mathbb{Q}_p,$$

l'action diagonale de $\mathbb{T}$ dans L/p^n est complètement déterminée par sa restriction au facteur $H^0(\mathfrak{D}_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p^n)$, comme vu plus haut.

$\square$

Remarque 3.2.9. Un corollaire de la preuve est que l'action d'un élément $T \in \mathbb{T}$ sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p^n)$ est complètement déterminée par l'action de T sur le module $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$ pour n'importe quel k suffisamment grand. Plus précisément, il existe un $k_0 \geq 1$ tel que l'ensemble des $T' \in \mathbb{T}$ tels que T et T' ont la même action sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p^n)$ est exactement l'ensemble des T' qui ont la même action que T sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$, et ce pour n'importe quel choix de $k \geq k_0$. En effet, les assertions (1) et (2) de la preuve impliquent qu'il existe un $k_0 \geq 0$ à partir duquel le noyau de

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n))$$

se stabilise, disons sur l'idéal H. En particulier, comme on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}/H \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+1}/p^n)) \\
\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)) \arrow[ur, "\times\overline{s}_{n,i}"'] &
\end{tikzcd}$$

et que les deux morphismes qui partent de $\mathbb{T}/H$ sont bijectifs sur leur image, on a que l'action de $\mathbb{T}$ sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+1}/p^n)$ est complètement déterminée par celle sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n)$.

Il nous reste à démontrer un lemme sur les $\mathbb{Z}_p$-sous-modules bornés d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.

Lemme 3.2.10. *Soit V un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Soit $M \subseteq V$ un $\mathbb{Z}_p$-sous-module borné. Alors M est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $V = \mathbb{Q}_p^d$ pour un $d \geq 1$. Par équivalence des normes sur les espaces de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, on a que M est contenu dans un cube $(p^{-m}\mathbb{Z}_p)^d \subseteq \mathbb{Q}_p^d$, et donc en est un $\mathbb{Z}_p$-sous-module. Or, $(p^{-m}\mathbb{Z}_p)^d$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, et est donc noethérien, comme $\mathbb{Z}_p$ est noethérien. Il suit que chacun de ses sous-modules, dont M, est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$.

$\square$

Chapitre 4

Application aux représentations galoisiennes

On applique les résultats de la section 3, et spécialement le théorème 3.2.5, au calcul des poids de Hodge-Tate-Sen des représentations associés aux formes propres surconvergentes.

À partir de maintenant, on suppose que $K^p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^p)$ est de la forme $\prod_{\ell \neq p} K_\ell$ pour K_ℓ ouvert et compact, et $K_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ pour tous les nombres premiers ℓ en dehors d'un ensemble fini. Soit S un ensemble fini de nombres premiers contenant p et tous les nombres premiers ℓ pour lesquels $K_\ell \neq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On considère l'algèbre de Hecke sphérique $\mathbb{T}_S = \mathbb{Z}_p[\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f^S)//\prod_{\ell \notin S} K_\ell]$. Elle s'identifie à une sous-algèbre commutative de $\mathbb{T}$, telle que définie dans la section 3. Dans ce qui suit, on va utiliser à plusieurs reprises le théorème suivant.

Théorème 4.0.1 ([Sch15, Corollary V.1.11])**.** *Munissons $\mathbb{T}_S$ de la topologie la plus grossière pour laquelle les applications*

$$\mathbb{T}_S \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p} H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$$

pour $k \geq 1$ sont continues, où le côté droit est muni de sa topologie comme espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}_p$. Alors, pour toute surjection d'anneaux $\mathbb{T}_S \longrightarrow A$ qui est continue lorsque A est muni de la topologie discrète, il existe un unique déterminant continu D de dimension 2 à valeurs dans A sur $G_{\mathbb{Q},S}$ tel que, pour tout $\ell \notin S$, le polynôme caractéristique d'un Frobenius géométrique Frob_ℓ est

$$X^2 - \frac{1}{\ell} T_\ell X + \frac{1}{\ell} S_\ell. \tag{4.0.2}$$

Remarque 4.0.3. Dans l'équation (4.0.2), par abus de notation, on dénote par $\ell^{-1}T_\ell$ et $\ell^{-1}S_\ell$ leur image dans A.

Soit A est un anneau topologique (pas forcément fini ou discret) muni d'un morphisme d'anneaux $\mathbb{T}_S \longrightarrow A$. Si on a un déterminant continu D de dimension 2 à valeurs dans A sur $G_{\mathbb{Q},S}$ satisfaisant (4.0.2), alors pour tout morphisme continu $\lambda : A \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, on obtient un déterminant continu de dimension 2 à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ sur $G_{\mathbb{Q},S}$. Par le théorème 2.7.16, ce déterminant provient d'une (unique) représentation continue semi-simple $\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$, et donc d'une représentation semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ non ramifiée en dehors de S. En particulier, pour toute forme propre surconvergente f, il existe un morphisme d'anneaux $\mathbb{T}_S \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ induit par f, envoyant un élément $T \in \mathbb{T}_S$ vers la valeur propre $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ satisfaisant $Tf = \lambda f$. On rappelle que par définition, l'image de $\mathbb{T}_S$ est contenue dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}_S \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \overline{\mathbb{Q}_p} \\ A \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

alors, par l'équation (4.0.2) et la définition de la représentation associée à la forme f (cf. définition 2.7.10), la représentation (de $G_{\mathbb{Q}}$) induite par le déterminant D est précisément celle associée à f. On peut donc voir le déterminant sur A comme paramétrisant des représentations continues de $G_{\mathbb{Q}}$, dont possiblement certaines qui sont associées à des formes propres surconvergentes.

La méthode employée pour montrer le théorème 1.0.3 est la suivante.

(1) Pour tout K_p suffisamment petit, on construit un anneau topologique $\mathcal{R}$ (qui dépend de K^p et de K_p), qui est une algèbre affinoïde sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, qui reçoit un morphisme de $\mathbb{T}_S$ et pour lequel il existe un déterminant continu de dimension 2 à valeurs dans $\mathcal{R}$ sur $G_{\mathbb{Q},S}$ satisfaisant (4.0.2) pour tout $\ell \notin S$. (En particulier, tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbre $\mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ est continu, par la remarque 2.1.8). Cet anneau agit fidèlement et diagonalement sur l'ensemble des formes modulaires classiques de niveau K^pK_p et de poids $k \geq 0$. Pour chaque poids fixé, tout élément de $\mathcal{R}$ agit à travers un opérateur de Hecke. Cela nous permet de déduire que les idéaux maximaux qui correspondent aux formes propres classiques sont denses dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{R})$, ainsi que toutes ses composantes irréductibles.

(2) On montre qu'il existe des polynômes $P_i \in (\mathcal{R}_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_i)[X]$, pour $\mathcal{R}_i$ les anneaux correspondants aux composantes irréductibles de $\mathcal{R}$ et E_i des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$, tels que pour tout morphisme
$$\lambda : \mathcal{R}_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p},$$
le polynôme de Sen de la représentation qui correspond au déterminant à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ induit par celui à valeurs dans $\mathcal{R}$ est donné par $(\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} 1)(P_i)$. On montre que le coefficient constant de chacun de ces polynômes P_i est 0 en utilisant le fait que c'est le cas pour $(\lambda \otimes 1)(P_i)$ pour tout λ provenant d'une forme propre classique et la densité des idéaux maximaux correspondant aux formes classiques. Cela implique l'un des poids de Hodge-Tate-Sen de la représentation associée à n'importe quel morphisme $\mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ est 0.

(3) On montre que tout représentation associée à une forme propre surconvergente de niveau modéré K^p peut être obtenue via un morphisme $\mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ pour un certain K_p et on conclut.

4.1 Construction de l'anneau $\mathcal{R}$ et du déterminant

Pour la suite, on fixe un sous-groupe ouvert et compact $K_p \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ suffisamment petit pour que $\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, \mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$ et $\overline{s}_{1,i}$ existent. On fixe aussi un choix de $i \in \{1,2\}$. On construit une algèbre affinoïde $\mathcal{R}$, qui dépend de tout ce qui précède, dans

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}\Big(\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\Big),$$

de sorte que $\mathcal{R}$ contient l'image de l'algèbre de Hecke sphérique. Pour ce faire, on construit une action d'un quotient R^{ps} d'un certain produit fini d'anneaux de séries entières sur l'anneau des entiers d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, qui représente les relèvements de certaines pseudo-représentations de $G_{\mathbb{Q},S}$ sur un corps fini $\mathbb{F}$. Par définition, on a un déterminant continu naturel de dimension 2 à valeurs dans R^{ps}. Ensuite, en utilisant le théorème 3.2.5, on étend l'action de R^{ps} en une action d'un produit d'algèbres de Tate sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et on prend $\mathcal{R}$ comme l'image de cette action. Par construction, on obtient un déterminant continu de dimension 2 à valeurs dans $\mathcal{R}$ satisfaisant (4.0.2) pour tout $\ell \notin S$, induit par celui à valeurs dans R^{ps}. De plus, tout morphisme $\mathbb{T}_S \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ provenant d'un vecteur propre commun pour l'action $\mathbb{T}_S$ sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$ s'étend en un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. En particulier, dans le cas $i = 1$ (cf. remarque 2.5.5), $V_{K^pK_p,1} \in \mathcal{V}_{K^pK_p}$ (cf. section 2.6), et donc on a un morphisme Hecke équivariant

$$\operatorname*{colim}_{K_p\to 1} H^0(V_{K^pK_p,1}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}) \longrightarrow M_k^\dagger(K^p).$$

Pour une forme propre surconvergente dans l'image de ce morphisme, il existe un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ associé à cette représentation. On a aussi que, pour $i = 1, 2$, l'image de $\mathbb{T}_S$ est dense (dans un certain sens) dans $\mathcal{R}$, ce qui nous permet de définir une action fidèle de $\mathcal{R}$ sur chaque $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ qui se factorise à travers l'action de $\mathbb{T}_S \otimes E$ pour E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, ce qu'on interprète comme un résultat de densité des idéaux maximaux de $\mathcal{R}$ correspondant à des formes propres classiques. Cela nous permet de déduire certaines propriétés des représentations obtenues par les morphismes $\mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ des propriétés des représentations associées aux formes propres classiques (cf. le théorème 4.2.1).

Soit $\mathbb{T}_{i,1}$ l'image de $\mathbb{T}_S$ dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p)}(H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p))$. Par le théorème 3.2.5, $\mathbb{T}_{i,1}$ est une $\mathbb{F}_p$-algèbre qui est finie comme ensemble. De plus, on a vu qu'on a une bijection

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p) = \operatorname*{colim}_{\times\overline{s}_{1,i}} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p),$$

et il existe un k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, l'image d'un élément de $\mathbb{T}_S$ dans $\mathbb{T}_{i,1}$ est déterminée par son action sur $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p)$ (cf. remarque 3.2.9). En particulier, par amplitude, on peut choisir k suffisamment grand pour avoir

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p) = H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p.$$

La préimage d'un élément de $\mathbb{T}_{i,1}$ dans $\mathbb{T}_S$ coïncide donc avec la préimage d'un élément de l'image de $\mathbb{T}_S$ dans $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p$, qui est certainement un ouvert dans la topologie sur $\mathbb{T}_S$ définie dans le théorème 4.0.1. On applique le théorème 4.0.1 pour construire un déterminant continu $D_{i,1}$ de dimension 2 à valeurs dans $\mathbb{T}_{i,1}$ sur $G_{\mathbb{Q},S}$ qui satisfait (4.0.2) pour tout $\ell \notin S$. L'anneau $\mathbb{T}_{i,1}$ étant de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$, tout ses idéaux premiers sont maximaux et c'est un produit fini de $\mathbb{F}_p$-algèbres locales dont les corps résiduels sont des extensions finies de $\mathbb{F}_p$ (voir [Sta25, 00JA]). Fixons $\mathbb{F}$ un corps fini qui admet un plongement de tous ces corps résiduels, et fixons un morphisme $W(\mathbb{F})[1/p] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ (de façon équivalente, un morphisme $\mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p)$). Alors, $\mathbb{T}_{i,1} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ agit sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p)$, où $\mathbb{F}$ agit par multiplication par un scalaire via le morphisme $\mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p)$. On dénote par $\mathbb{T}_i$ l'image de $\mathbb{T}_{i,1} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$ (de façon équivalente, celle de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{F})$) dans $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p)}(H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}}/p))$. Elle possède un nombre fini d'idéaux premiers, tous maximaux, et le corps résiduel de chacun d'eux est canoniquement isomorphe à $\mathbb{F}$ via le morphisme $\mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{T}_i$. Encore une fois, par [Sta25, 00JA], on peut écrire

$$\mathbb{T}_i = \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}\, \mathbb{T}_i} \mathbb{T}_{i,m}$$

où chaque $\mathbb{T}_{i,m}$ est une $\mathbb{F}$-algèbre locale dont l'unique idéal premier correspond à $\mathfrak{m}$. Le déterminant $D_{i,1}$ induit un déterminant continu D_i de dimension 2 à valeurs dans l'anneau fini et discret $\mathbb{T}_i$ sur $G_{\mathbb{Q},S}$ via le morphisme $\mathbb{T}_{i,1} \longrightarrow \mathbb{T}_i$. Via les morphismes $\mathbb{T}_i \longrightarrow \mathbb{T}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m} = \mathbb{F}$, on obtient des déterminants continus $D_{\mathfrak{m}}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$. Les déterminants D_i et $D_{\mathfrak{m}}$ satisfont tous les deux (4.0.2).

Soit $R^{\mathrm{ps}}_{\mathfrak{m}}$ la $W(\mathbb{F})$-algèbre locale et profinie de corps résiduel $\mathbb{F}$ qui représente les relèvements continus de $D_{\mathfrak{m}}$, et $D^{\mathrm{univ}}_{\mathfrak{m}}$ le déterminant universel sur $R^{\mathrm{ps}}_{\mathfrak{m}}$ (cf. proposition 2.7.20). Écrivons

$$R^{\mathrm{ps}} = \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}\, \mathbb{T}_i} R^{\mathrm{ps}}_{\mathfrak{m}}.$$

On définit une action $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-linéaire de R^{ps} sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$, qui s'étend en une action $\mathbb{C}_p$-linéaire sur $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$, en définissant des morphismes compatibles

$$R^{\mathrm{ps}} \longrightarrow H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n) = H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})/p^n$$

pour tout $n \geq 1$ à partir des propriétés universelles des $R^{\mathrm{ps}}_{\mathfrak{m}}$. Notons l'image de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{F})$ dans

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n))$$

par $\mathbb{T}_i^{k,n}$. En particulier, $\mathbb{T}_i = \mathbb{T}_i^{0,1}$. La multiplication par $\overline{s}_{1,i}^k$ induit des isomorphismes

$$\mathbb{T}_i^{0,1} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,1}$$

qui respectent les morphismes de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{F})$. Il suit qu'on a une décomposition naturelle en produit de $\mathbb{F}$-algèbres locales

$$\mathbb{T}_i^{k,1} = \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} \mathbb{T}_i} \mathbb{T}_{i,\mathfrak{m}}^{k,1}.$$

Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \geq 1$, la $\mathbb{F}$-algèbre $\mathbb{T}_i^{k,n}$ est finie comme ensemble, donc, comme avant, on peut l'écrire comme un produit fini de $\mathbb{F}$-algèbres locales. De plus, on a un morphisme surjectif $\mathbb{T}_i^{k,n} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,1}$, qui envoie un endomorphisme linéaire de

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\text{int}})^{\otimes k})/p^n$$

à l'endomorphisme correspondant sur

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\text{int}})^{\otimes k})/p.$$

Il est clair de la définition que la préimage du nilradical de $\mathbb{T}_i^{k,1}$ est précisément le nilradical de $\mathbb{T}_i^{k,n}$. En particulier, le morphisme $\mathbb{T}_i^{k,n} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,1}$ induit un isomorphisme sur les réductions, et donc on peut écrire

$$\mathbb{T}_i^{k,n} = \prod_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} \mathbb{T}_i} \mathbb{T}_{i,\mathfrak{m}}^{k,n},$$

où chaque $\mathbb{T}_{i,\mathfrak{m}}^{k,n}$ est une $\mathbb{F}$-algèbre locale de corps résiduel $\mathbb{F}$, et tout morphisme surjectif $\mathbb{T}_{i,\mathfrak{m}}^{k,n} \longrightarrow \mathbb{F}$ se factorise par $\mathbb{T}_i^{k,n} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,1}$.

Soit $n \geq 1$. Pour construire un déterminant sur $\mathbb{T}_i^{k,n}$, on commence par construire un déterminant dans l'image de $\mathbb{T}_S$ dans

$$\operatorname{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\text{int}})^{\otimes k}/p^n))$$

en utilisant le théorème 4.0.1. Pour ce faire, on doit montrer la continuité du morphisme $\mathbb{T}_S$ vers son image. Encore une fois, on exploite les faux-invariants de Hasse.

Lemme 4.1.1. *Soit $n \geq 1$. Il existe un $m = m(n) \geq 1$ tel que $\overline{s}_{1,i}^m$ se relève en une section $s \in H^0(\mathfrak{X}_{K^pK_p}^*, (\omega_{K^pK_p}^{\text{int}})^{\otimes m})$ et la multiplication par (la réduction modulo p^n) de s commute avec l'action de $\mathbb{T}_S$ sur*

$$\Big(\prod_{k \in \mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{X}_{K^pK_p}^*, (\omega_{K^pK_p}^{\text{int}})^{\otimes k}/p^n)\Big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Démonstration. Par amplitude de $\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p}$, il existe un ℓ tel que $\overline{s}_{1,i}^{\ell}$ se relève en une section globale $s_0 \in H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes \ell})$. Comme $\overline{s}_{1,i}^{\ell}$ est $G(\mathbb{A}_f^p)$-invariante et par la remarque 3.2.4, on a que

$$(g-1)s_0 \in pH^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes \ell})$$

pour tout $g \in G(\mathbb{A}_f^p)$. Cela implique que

$$(g-1)s_0^{p^k} \in p^{k+1}H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes \ell p^k}),$$

et donc, par définition de l'action de l'algèbre de Hecke (cf. (2.3.8)),

$$T(ts_0^{p^k}) - T(t)s_0^{p^k} \in p^{k+1}H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes \ell p^k + j})$$

pour tout $T \in \mathbb{T}_S$ et tout $t \in H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes j})$. En particulier, on obtient le résultat voulu avec $m = \ell p^{n-1}$.

$\square$

Par le lemme 4.1.1, pour tout $n \geq 1$, il existe une section $s \in H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes m}/p^n)$ telle que la multiplication par s commute avec l'action de l'algèbre de Hecke, et qui est inversible exactement sur $\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}$. Ainsi, on a un isomorphisme $\mathbb{T}_S$-équivariant

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n) = \operatorname*{colim}_{\times s} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+mj}/p^n).$$

Par le même argument que dans la remarque 3.2.9, on a une identification de l'image de $\mathbb{T}_S$ dans

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n))$$

et dans

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+jm}/p^n))$$

pour tout j suffisamment grand. Comme avant, par le théorème 4.0.1, on peut donc construire un déterminant continu de dimension 2 à valeurs dans l'image de $\mathbb{T}_S$ dans

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p^n)}(H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p^n))$$

sur $G_{\mathbb{Q},S}$ qui satisfait (4.0.2) pour tout $\ell \notin S$. Le morphisme de cette image vers $\mathbb{T}_i^{k,n}$ induit un tel déterminant $D_i^{k,n}$ à valeurs dans $\mathbb{T}_i^{k,n}$, et un déterminant $D_{i,\mathfrak{m}}^{k,n}$ à valeurs dans $\mathbb{T}_{i,\mathfrak{m}}^{k,n}$. Il est clair que le déterminant $D_{i,\mathfrak{m}}^{k,n}$ est un relèvement de $D_{\mathfrak{m}}$, et donc il existe un unique morphisme d'anneaux topologiques

$$R_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{ps}} \longrightarrow \mathbb{T}_{i,\mathfrak{m}}^{k,n},$$

où $\mathbb{T}_{i,\mathfrak{m}}^{k,n}$ est muni de la topologie discrète, tel que le déterminant $D_{i,\mathfrak{m}}^{k,n}$ est induit par $D_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{univ}}$ via ce morphisme. En particulier, le déterminant $D_i^{k,n}$ est obtenu du déterminant $\prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Spec}\, \mathbb{T}_i} D_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{univ}}$ via le morphisme $R^{\mathrm{ps}} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,n}$. Par construction, les morphismes

$$R^{\mathrm{ps}} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,n}$$

sont compatibles avec les morphismes surjectifs $\mathbb{T}_i^{k,n} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,n'}$ pour $n' < n$, et avec les isomorphismes $\mathbb{T}_i^{0,1} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,1}$. Cela nous permet de définir l'action de R^{ps} : étant donné $r \in R^{\mathrm{ps}}$ et $f \in H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\mathrm{int}})^{\otimes k})$, soit $\overline{r}_n$ son image dans $\mathbb{T}_i^{k,n}$, et r_n un relèvement de $\overline{r}_n$ comme endomorphisme de

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\mathrm{int}})^{\otimes k}).$$

On définit rf comme

$$rf = \lim_{n\to\infty} r_n f.$$

Cela ne dépend, bien sûr, pas du choix des relèvements r_n. Cette action s'étend en une action $\mathbb{C}_p$-linéaire sur chaque $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k})$ par linéarité.

Explicitement, l'anneau $R_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{ps}}$ est donné, comme anneau topologique, par un quotient d'un anneau $W(\mathbb{F})[X_{\mathfrak{m},1}, \ldots, X_{\mathfrak{m},n_{\mathfrak{m}}}]$ muni de la topologie $(p, X_{\mathfrak{m},1}, \ldots, X_{\mathfrak{m},n_{\mathfrak{m}}})$-adique (voir la proposition 2.7.20). En particulier, comme les morphismes $R^{\mathrm{ps}} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,1}$ sont continus pour la topologie discrète sur $\mathbb{T}_i^{k,1}$ et compatibles avec les isomorphismes $\mathbb{T}_i^{0,1} \longrightarrow \mathbb{T}_i^{k,1}$, la préimage de $0 \in \mathbb{T}_i^{k,1}$ dans chaque facteur $W(\mathbb{F})[X_{\mathfrak{m},1}, \ldots, X_{\mathfrak{m},n_{\mathfrak{m}}}]$ est ouverte, et il existe un n, indépendant de k, pour lequel

$$X_{\mathfrak{m},i}^n H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\mathrm{int}})^{\otimes k}) \subseteq pH^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\mathrm{int}})^{\otimes k})$$

pour tout $\mathfrak{m}$ et tout i. En particulier, l'action de

$$\prod_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Spec} \mathbb{T}_i} W(\mathbb{F})[X_{\mathfrak{m},1}, \ldots, X_{\mathfrak{m},n_{\mathfrak{m}}}]$$

sur

$$\Big(\prod_k H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\mathrm{int}})^{\otimes k})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

à travers l'action de R^{ps} s'étend en une action d'un produit d'algèbres de Tate

$$\prod_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Spec} \mathbb{T}_i} E\langle X_{\mathfrak{m},1}/p^{1/n}, \ldots, X_{\mathfrak{m},n_{\mathfrak{m}}}/p^{1/n}\rangle$$

pour E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant une racine n-ième de p fixée $p^{1/n}$. On définit $\mathcal{R}$ comme l'image de ce produit dans

$$\operatorname{End}_{\mathbb{C}_p}\Big(\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega_{K^pK_p}^{\mathrm{int}})^{\otimes k})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\Big).$$

Les propriétés suivantes sont immédiates de la définition de $\mathcal{R}$.

(1) $\mathcal{R}$ est une algèbre affinoïde sur E.

(2) $\mathcal{R}$ agit sur

$$\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i},(\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\Big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p,$$

et son action préserve chacun des facteurs $H^0(V_{K^pK_p,i},\omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$.

(3) Pour tout $r\in\mathcal{R}$ et tout $n\geq 0$, il existe un $r'\in\mathcal{R}$ de norme d'opérateur ≤ 1 sur

$$\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i},(\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\Big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$$

ainsi qu'un $x\in R^{\mathrm{ps}}\otimes_{W(\mathbb{F})}\mathcal{O}_E$ et un $j\geq 0$ tels que $r=x/p^j+p^nr'$.

La proposition suivante donne certaines autres propriétés importantes de $\mathcal{R}$.

Proposition 4.1.2. *Soit $\mathcal{R}$ défini comme plus haut.*

(1) *Le morphisme naturel $R^{\mathrm{ps}}\longrightarrow\mathcal{R}$ est continu.*

(2) *L'image de R^{ps} dans $\mathcal{R}$ contient l'image de $\mathbb{T}_S\otimes_{\mathbb{Z}_p}W(\mathbb{F})$ dans*

$$\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i},(\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\Big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p.$$

(3) *Il existe un déterminant continu de dimension 2 à valeurs dans $\mathcal{R}$ sur $G_{\mathbb{Q},S}$ qui satisfait* (4.0.2) *pour tout $\ell\notin S$.*

(4) *Tout vecteur propre commun f pour l'action de $\mathbb{T}_S$ sur $H^0(V_{K^pK_p,i},\omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ est un vecteur propre commun pour l'action de $\mathcal{R}$, et les valeurs propres associées aux différents éléments $r\in\mathcal{R}$ sont dans l'adhérence du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les valeurs propres associées aux différents éléments de $\mathbb{T}_S\otimes_{\mathbb{Z}_P}E$.*

(5) *Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, l'action de $\mathcal{R}$ se restreint en une action de $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p},\omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$, qui est une extension de l'action de $\mathbb{T}_S$, et l'image de cette action coïncide avec l'image de $\mathbb{T}_S\otimes E$.*

Démonstration. Pour (1), il suffit de montrer que chacun des morphismes

$$W(\mathbb{F})[X_{\mathfrak{m},1},\dots,X_{\mathfrak{m},n_{\mathfrak{m}}}]\longrightarrow E\langle X_{\mathfrak{m},1}/p^{1/n},\dots,X_{\mathfrak{m},n_{\mathfrak{m}}}/p^{1/n}\rangle$$

est continu, ce qui est clair.

Pour (2), si, pour $D^{\mathrm{univ}}=\prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Spec}\,\mathbb{T}_i}D^{\mathrm{univ}}_{\mathfrak{m}}$ et $\ell\notin S$, on a $D(X-\mathrm{Frob}_\ell)=X^2-a_\ell X+b_\ell$ pour $a_\ell,b_\ell\in R^{\mathrm{ps}}$, alors, par définition du morphisme $R^{\mathrm{ps}}\longrightarrow\mathbb{T}_i^{k,n}$, l'image de a_ℓ coïncide avec l'image de $\ell^{-1}T_\ell$ et l'image de b_ℓ avec celle de $\ell^{-1}S_\ell$. Ainsi, il suit que les images de a_ℓ et b_ℓ dans $\mathcal{R}$, vu comme sous-ensemble de

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}\Big(\Big(\prod_{k\in\mathbb{Z}} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i},(\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\Big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\Big),$$

sont respectivement $\ell^{-1}T_\ell$ et $\ell^{-1}S_\ell$. Aussi, on a que $b_\ell = D^{\mathrm{univ}}(\mathrm{Frob}_\ell)$ admet un inverse $b_\ell^{-1} = D^{\mathrm{univ}}(\mathrm{Frob}_\ell^{-1})$, dont l'image dans $\mathcal{R}$ est $(\ell^{-1}S_\ell)^{-1}$. Comme $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(\mathbb{F})$ est engendrée par les T_ℓ, S_ℓ et S_ℓ^{-1} pour $\ell \notin S$, on a (2).

Pour (3), par continuité de $R^{\mathrm{ps}} \longrightarrow \mathcal{R}$, on obtient un déterminant continu D de dimension 2 à valeurs dans $\mathcal{R}$ sur $G_{\mathbb{Q},S}$. La discussion précédente montre qu'il satisfait (4.0.2) pour tout $\ell \notin S$.

Pour (4), soit $f \in H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k})$ un vecteur propre commun pour l'action de $\mathbb{T}_S$. Par construction de l'action de R^{ps}, f est aussi un vecteur propre commun pour l'action de R^{ps}. Ensuite, pour tout $r \in \mathcal{R}$ et tout $n \geq 1$, il existe un $r' \in \mathcal{R}$ de norme d'opérateur ≤ 1, $x \in R^{\mathrm{ps}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ et $j \geq 0$ tel que $r = x/p^j + p^n r'$. On a donc que

$$rf = \frac{1}{p^j} xf + p^n r' f.$$

Comme n est arbitraire, $rf \in \mathbb{C}_p f$, et même $f \in Ef$ où E est l'adhérence du sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{C}_p$ engendré par les valeurs propres des éléments de $\mathbb{T}_S$ pour le vecteur propre f.

Enfin, pour (5), comme $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k})$ admet une base de formes propres classiques, par (4), $\mathcal{R}$ préserve $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k})$. Tout $r \in \mathcal{R}$ est dans l'adhérence de l'image de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ pour la norme d'opérateur sur $H^0(V_{K^pK_p,i}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k})$, et donc aussi sur $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k})$. Comme l'image de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$ dans

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k}))$$

est un E-espace vectoriel de type fini (cf. la preuve du théorème 3.2.5) et E est un corps complet, c'est une partie fermée de

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}(H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k}))$$

muni de sa norme d'opérateur. En particulier, l'image de $\mathcal{R}$ est exactement l'image de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$, comme voulu.

$\square$

Enfin, un dernier résultat important est que l'action de $\mathcal{R}$ sur les $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k})$ est fidèle lorsqu'on considère tous les niveaux $k \geq 0$ simultanément.

Proposition 4.1.3. *Le morphisme d'anneaux*

$$\mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}\left(\left(\prod_{k \geq 0} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega_{K^pK_p}^{\mathrm{int}})^{\otimes k})\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\right)$$

est injectif.

Démonstration. Supposons qu'il existe un $r \in \mathcal{R}$ non nul dans le noyau. Quitte à multiplier par une puissance de $p^{1/n} \in E$, on peut supposer que x est de norme d'opérateur ≤ 1, de sorte que r préserve

$$\prod_{k\geq 0} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}),$$

mais aussi que r n'agit pas par 0 dans

$$\prod_{k\geq 0} H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p).$$

Notons que par construction de l'action de $\mathcal{R}$ sur les $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p}, \omega^{\ell}_{K^pK_p})$, l'élément r agit sur les $H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\ell})$ pour tout ℓ. La stratégie est de montrer qu'il existe un m suffisamment grand tel que l'action de r commute avec la multiplication par $\overline{s}^m_{1,i}$. Cela montrera le résultat voulu. En effet, si un tel m existe, on a que l'identification

$$H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p) = \operatorname*{colim}_{u\geq 0} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+mu}/p)$$

respecte l'action de r. En particulier, pour k pour lequel r n'agit pas de façon nulle sur $H^0(\mathfrak{D}_{K^pK_p,i}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k}/p)$, il doit exister un $u \geq 0$ pour lequel l'action de r sur

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+mu}/p) = H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+mu})/p$$

n'est pas nulle. En particulier, cela implique que l'action de r sur

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+mu})$$

n'est pas nulle, ce qui est en contradiction avec le fait que x est dans le noyau.

Il reste à démontrer notre assertion. On peut écrire $r = x/p^j + pr'$, où $r' \in \mathcal{R}$ est de norme d'opérateur ≤ 1 et $x \in R^{\mathrm{ps}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}_E$. Par le lemme 4.1.1, il existe un m tel que $\overline{s}^m_{1,i}$ se relève en une section globale $s \in H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes m})$ telle que

$$T(st) - sT(t) \in p^{j+1} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+m}).$$

Comme l'action de tout élément de R^{ps} sur

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+m})/p^{j+1}$$

coïncide avec celle d'un élément de $\mathbb{T}_S$, cela reste vrai pour $T \in R^{\mathrm{ps}}$, et tout $T \in R^{\mathrm{ps}} \otimes_{W(\mathbb{F})} \mathcal{O}_E$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} r(st) - sr(t) &= p^{-j}(x(st) - sx(t)) + p(r'(st) - sr'(t)) \\ &\in pH^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k+m}) \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})$. Cela complète la démonstration de l'assertion.

□

On interprète ce résultat comme un résultat de densité des idéaux maximaux de $\mathcal{R}$ qui correspondent aux formes propres classiques.

Corollaire 4.1.4. *L'ensemble des idéaux maximaux correspondant aux formes propres classiques est dense dans* $\operatorname{Spec}\mathcal{R}$*, ainsi que dans toutes ses composantes irréductibles.*

Démonstration. L'adhérence de l'ensemble des idéaux maximaux correspondant aux formes propres classiques est l'ensemble d'annulation de leur intersection. Soit $r \in \mathcal{R}$ un élément dans cette intersection. L'image de r dans

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}\left(\left(\prod_{k\geq 0} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\right)$$

est un opérateur qui agit diagonalement sur chaque $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$. De plus, l'action de r sur chacun de ces facteurs correspond à l'action d'un élément de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$. Par hypothèse, pour tout f qui est un vecteur propre commun de tous les éléments de $\mathbb{T}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} E$, on a que $xf = 0$. Or, par la théorie classique des formes modulaires, $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ admet une base de tels vecteurs propres communs, donc r agit par 0 sur tout l'espace $H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$. Il suit que l'image de r dans

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}_p}\left(\left(\prod_{k\geq 0} H^0(\mathfrak{X}^*_{K^pK_p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K^pK_p})^{\otimes k})\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\right)$$

est égale à 0, donc, par la proposition 4.1.3, on a que $r = 0$. Cela donne la densité dans $\mathcal{R}$.

Maintenant, en général, pour un anneau noethérien A, si S est un sous-ensemble dense de $\operatorname{Spec} A$, alors $S \cap U$ est dense dans U pour tout ouvert U. Soient $I_1, \ldots, I_n$ les idéaux premiers minimaux de A. Si $U \cap V(I_j) \cap S = \varnothing$, alors $U \cap S$ est contenu dans le fermé $U \cap \bigcup_{i\neq j} I_j$. En particulier, l'adhérence de $U \cap S$ est contenu dans le fermé $U \cap \bigcup_{i\neq j} V(I_i)$, qui est strictement plus petit que U si $U \cap V(I_j) \neq \varnothing$. Cela contredit le fait que $S \cap U$ est dense dans U. On obtient le résultat voulu en appliquant à $A = \mathcal{R}$, qui est affinoïde, et donc noethérien.

□

4.2 Interpolation du polynôme de Sen

Comme $\mathcal{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, la donnée du déterminant continu D sur $\mathcal{R}$ est équivalente à la donnée d'une pseudo-représentation continue $T : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathcal{R}$ de dimension 2 (cf. proposition 2.7.17). Pour tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, la composition $\lambda \circ T$ est une pseudo-représentation continue de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q},S}$ dans le corps algébriquement clos $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Par le théorème 2.7.12, il existe, à isomorphisme près, une unique représentation continue semi-simple de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q},S}$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ dont la trace est $\lambda \circ T$. On montre le résultat suivant.

Théorème 4.2.1. *Pour tout $\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, l'un des poids de Hodge-Tate-Sen de la représentation associée à $\lambda \circ T$ est 0.*

On montre le théorème 4.2.1 en construisant des polynômes sur des quotients de $\mathcal{R}$ qui interpolent le polynôme de Sen des représentations associées à $\lambda \circ T$ pour les différents λ. Cela nous permet de déduire le théorème 4.2.1 du cas des formes propres classiques via le corollaire 4.1.4. On illustre la méthode de preuve du théorème 4.2.1 dans un cas simple. Par exemple, s'il existe une représentation

$$\rho_{\mathcal{R}} : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{R})$$

dont la trace est T, on peut construire son polynôme de Sen $P \in (\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E')[X]$. Pour tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ (qui est automatiquement continu), la semi-simplification de la représentation $\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}_p})$ obtenue de $\rho_{\mathcal{R}}$ par composition avec λ est exactement celle associée à $\lambda \circ T$. Par fonctorialité du polynôme de Sen, on a que le polynôme de Sen P_λ de ρ_λ (et donc celui de sa semi-simplification, par la partie (4) du lemme 2.8.9) est $(\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} 1)(P)$. En particulier, si on peut montrer que le coefficient constant de P est nul, il en est de même pour tout P_λ, ce qui montre le théorème 4.2.1. Or, pour tout λ associé à une forme propre classique, le polynôme P_λ a pour coefficient constant 0, comme toute représentation associé à une forme propre classique de poids k a pour poids de Hodge-Tate-Sen $0, k-1$, donc son coefficient constant est nul. Par le corollaire 4.1.4, il suit que le coefficient constant de P est nul.

Pour le cas général, on a le résultat suivant.

Lemme 4.2.2. *Soit $\mathcal{S}$ une E-algèbre affinoïde qui est intègre et normale, et soit $T : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathcal{S}$ une pseudo-représentation continue, telle que $T(c) = 0$ pour c une conjugaison complexe de $G_{\mathbb{Q},S}$. Alors il existe un polynôme $P \in (\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E')[X]$ pour E' une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ tel que pour tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\lambda : \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, le polynôme de Sen de la représentation de dimension 2 associée à $\lambda \circ T$ est $(\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} 1)(P)$.*

On montre le théorème 4.2.1 en supposant le lemme. Soient $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ les quotients de $\mathcal{R}$ par ses différents idéaux minimaux. Chaque $\mathcal{R}_i$ est affinoïde et intègre. Comme une algèbre affinoïde sur E est de Nagata, sa clôture entière $\mathcal{R}'_i$ est de type fini comme $\mathcal{R}$-module, donc elle admet une structure naturelle d'algèbre affinoïde, et le morphisme $\mathcal{R}_i \longrightarrow \mathcal{R}'_i$ est continu (voir la partie (3) du lemme 2.1.10). On obtient une pseudo-représentation continue T'_i dans $\mathcal{R}'_i$ par composition de T avec $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'_i$. Soit $c \in G_{Q,S}$ une conjugaison complexe. On a que $T(c) = 0$, et donc $T'_i(c) = 0$ pour tout i. En effet, il suit, par exemple, de [Hid12, Theorem 4.2.7 (1)], que $\lambda \circ T(c) = 0$ pour tout λ correspondant à une forme propre classique. Autrement dit, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\operatorname{Spec} \mathcal{R}$ correspondant à une forme propre classique, $T(c) \in \mathfrak{m}$. Par le corollaire 4.1.4, il suit que $T(c) = 0$, comme voulu.

On applique le lemme 4.2.2 pour obtenir des polynômes $P_i \in (\mathcal{R}'_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_i)[X]$ tels que pour tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\lambda' : \mathcal{R}'_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, le polynôme de Sen de la représentation semi-simple de trace $\lambda' \circ T'_i$ est $P_{i,\lambda'} = (\lambda' \otimes_{\mathbb{Q}_p} 1)(P_i)$. Il suit du théorème de

Cohen-Seidenberg que tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\lambda : \mathcal{R}_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ s'étend en un morphisme $\lambda' : \mathcal{R}'_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. Ainsi, si on peut montrer, comme plus haut, que le terme constant de P_i est nul, on aura prouvé le théorème 4.2.1, comme tout morphisme $\mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ se factorise par l'un des $\mathcal{R}_i$.

Pour montrer que le coefficient constant est nul, on procède de façon analogue au cas spécial expliqué plus haut. Soit $\sum_j a_j \otimes b_j$ le terme constant de P_i, avec les $b_j \in E_i$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}_p$, et $a_j \in \mathcal{R}'_i$. On a que cette expression est 0 si et seulement si tous les a_j sont nuls. Si $a_j \neq 0$ pour un certain j, alors il existe un polynôme unitaire $Q(X) \in \mathcal{R}_i[X]$ tel que $Q(a_j) = 0$, mais $Q(0) \neq 0$. Par le corollaire 4.1.4, il existe un poids k et une forme propre classique $f \in H^0(\mathcal{X}^*_{K^pK_p,\mathbb{C}_p}, \omega^{\otimes k}_{K^pK_p})$ telle que le morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ induit par la forme f se factorise par des morphismes $\lambda_i : \mathcal{R}_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ et $\lambda'_i : \mathcal{R}'_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, et on a $\lambda(Q(0)) \neq 0$. Or, comme la représentation associée à la pseudo-représentation $\lambda'_i \circ T'_i = \lambda_i \circ T_i$ a pour poids de Hodge-Tate-Sen $0, k-1$, le coefficient constant de son polynôme de Sen $\sum_i \lambda'(a_i) \otimes b_i$ est nul, ce qui implique que $\lambda'(a_j) = 0$. Comme λ, λ' sont des morphismes d'anneaux, il suit qu'on a

$$0 \neq \lambda(Q(0)) = \lambda'(Q(0)) = \lambda'(Q(a_j)) = 0,$$

une contradiction.

Remarque 4.2.3. Une preuve similaire montre aussi que le polynôme P_i est dans $\mathcal{R}'_i[X]$.

Il reste à montrer le lemme 4.2.2.

Dém. du lemme 4.2.2. On suit l'approche introduite par Wiles dans [Wil88]. On définit les fonctions

$$\begin{aligned} a(\sigma) &:= \frac{T(c\sigma) + T(\sigma)}{2} \\ d(\sigma) &:= T(\sigma) - a(\sigma) = \frac{T(\sigma) - T(c\sigma)}{2} \\ x(\sigma, \tau) &:= a(\sigma\tau) - a(\sigma)a(\tau) \end{aligned}$$

pour $\sigma, \tau \in G_{\mathbb{Q},S}$. Sous certaines hypothèses, on peut se servir de ces fonctions pour construire une représentation continue $G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{S})$ de trace T. Soit $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}$ l'idéal engendré par les $x(\sigma, \tau)$, appelé idéal de réductibilité. Si $\mathcal{I} = 0$, alors, par définition, $a : G \longrightarrow \mathcal{S}$ est un caractère continu de G à valeurs dans $\mathcal{S}^\times$. On peut vérifier que $x(\tau, \sigma) = d(\sigma\tau) - d(\sigma)d(\tau)$, et donc la fonction d est aussi un caractère. On a alors une représentation continue

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q},S} &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{S}) \\ \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} a(\sigma) & 0 \\ 0 & d(\sigma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dont la trace est donnée par $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{I}$ est engendré par un élément $x(\sigma_0, \tau_0)$, alors on peut vérifier que

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q},S} &\longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{S}) \\ \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} a(\sigma) & \frac{x(\sigma,\tau_0)}{x(\sigma_0,\tau_0)} \\ x(\sigma_0,\sigma) & d(\sigma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une représentation continue de $G_{\mathbb{Q},S}$ dont la trace est T. Dans ces cas-là, on peut prendre P comme le polynôme de Sen de la représentation $G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{S})$.

En général, on procède en "recollant" cette dernière construction. On peut supposer que $I \neq 0$, sinon on conclut comme expliqué précédemment. Comme $\mathcal{S}$ est noethérien, $\mathcal{I}$ est engendré par un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_r$. Comme chacun de ces éléments est une combinaison $\mathcal{S}$-linéaire de $x(\sigma, \tau)$, on peut supposer que $x_i = x(\sigma_i, \tau_i)$ pour tout i. Soit $\mathcal{S}^+$ la boule unité fermée de $\mathcal{S}$, qui en est un sous-anneau. Pour chaque i, on définit $\mathcal{S}_i^+$ comme la complétion p-adique du sous-anneau $\mathcal{S}^+[x_1/x_i, \ldots, x_r/x_i]$, et $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}[1/p]$. $\mathcal{S}_i$ est naturellement une algèbre affinoïde sur E, et l'application E-linéaire naturelle

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_i$$

est continue pour tout i (voir le théorème 2.1.9). On obtient donc des pseudo-représentations continues

$$T_i : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathcal{S}_i$$

qui étendent T. L'idéal de réductibilité pour T_i est engendré sur $\mathcal{S}$ par les x_j, donc il est engendré par (l'image de) x_i sur $\mathcal{S}_i$. Par la construction dans le cas où l'idéal de réductibilité est principal, on a une extension finie E' de $\mathbb{Q}_p$ et des polynômes $P_i \in (\mathcal{S}_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} E')[X]$ de degré 2 qui interpolent le polynôme de Sen des représentations associées à chaque morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathcal{S}_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. Concrètement, on a des polynômes unitaires

$$P_i = \sum_{j=0}^{2} \Big(\sum_{b \in B} a_{i,j,b} \otimes b \Big) X^j,$$

où B est un sous-ensemble $\mathbb{Q}_p$-linéairement indépendant fini de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et $a_{i,j,b} \in \mathcal{S}_i$ pour $i = 1, \ldots, r$. Les $a_{i,j,b}$, vues comme des fonctions $\mathrm{Spm}(\mathcal{S}_i) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, sont bornées, comme $\mathcal{S}_i$ est affinoïde (voir la partie (6) du lemme 2.1.7).

Maintenant, on définit $\mathcal{Y}_i \subseteq \mathrm{Spm}(\mathcal{S}_i)$ comme le sous-ensemble ouvert donné par $x_i \neq 0$, et $\mathcal{X}_i \subseteq \mathrm{Spm}(\mathcal{S})$ celui donné par $|x_j| \leq |x_i|$ pour tout j et $x_i \neq 0$. Notons que le morphisme $\mathrm{Spm}(\mathcal{S}_i) \longrightarrow \mathrm{Spm}(\mathcal{S})$ induit par $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_i$ se restreint en un isomorphisme $\mathcal{Y}_i \longrightarrow \mathcal{X}_i$. Les restrictions des coefficients $a_{i,j,b}$ à $\mathcal{Y}_i$ correspondent à des sections $a'_{i,j,b}$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(\mathcal{S})}$ sur $\mathcal{X}_i$. Celles-ci se recollent en des sections sur

$$\bigcup_i \mathcal{X}_i = \mathrm{Spm}(\mathcal{S}) \backslash V(\mathcal{I}).$$

En effet, par définition des $a_{i,j,b}$, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i'}$, on a que

$$\sum_{j=0}^{2} \Big(\sum_{b \in B} a'_{i,j,b} \otimes b \Big) X^j = \sum_{j=0}^{2} \Big(\sum_{b \in B} a'_{i',j,b} \otimes b \Big) X^j$$

dans $\mathcal{S}/\mathfrak{m}[X]$ (les deux côtés étant le polynôme de Sen d'une même représentation), et donc $a'_{i,j,b} = a'_{i',j,b}$ dans $\mathcal{S}/\mathfrak{m}$. Comme $\mathcal{S}$ est de Jacobson (car affinoïde) et réduit, on a que $a'_{i,j,b}|_{\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i'}} = a'_{i',j,b}|_{\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_{i'}}$ pour tous i, i', et donc on peut recoller les $a'_{i,j,b}$ en des sections

$$a'_{j,b} \in H^0(\mathrm{Spm}(\mathcal{S}) \backslash V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(\mathcal{S})}).$$

Comme $\mathcal{S}$ est normal et les $a'_{j,b}$ sont bornées sur $\mathrm{Spm}(\mathcal{S}) \backslash V(\mathcal{I})$, elles s'étendent en des sections globales $a''_{j,b} \in \mathcal{S}$ (voir [Bar76, section 3]). On montre que le polynôme

$$P(X) = \sum_{j=0}^{2} \Big(\sum_{b \in B} a''_{j,b} \otimes b \Big) X^j \in (\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E')[X]$$

satisfait la propriété voulue. D'abord, il suit de la construction que pour tout morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\lambda : \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ associé à un idéal maximal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(\mathcal{S}) \backslash V(\mathcal{I})$, on a que le polynôme de Sen de la représentation associé à la pseudo-représentation $\lambda \circ T$ est

$$P(X) = \sum_{j=0}^{2} \Big(\sum_{b \in B} \lambda(a''_{j,b}) \otimes b \Big) X^j.$$

Pour λ un morphismes de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ dont le noyau contient $\mathcal{I}$, il existe un $1 \leq i \leq r$ tel que λ s'étend en un morphisme $\lambda' : \mathcal{S}[x_1/x_i, \ldots, x_r/x_i] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. En effet, cela suit, par exemple, de la surjectivité de l'éclatement de $\mathrm{Spec}\, \mathcal{S}$ en $\mathcal{I}$, qui elle-même suit du fait que $\mathcal{S}$ est intègre et $\mathcal{I} \neq 0$. Le morphisme λ' est $\mathbb{Q}_p$-linéaire, donc il existe un entier n tel que $\mathcal{S}^+[p^n x_1/x_i, \ldots, p^n x_r/x_i] \subseteq \mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$. On définit $\mathcal{S}_i'^+$ comme la complétion p-adique de $\mathcal{S}^+[p^n x_1/x_i, \ldots, p^n x_r/x_i]$ et $\mathcal{S}'_i = \mathcal{S}_i'^+[1/p]$. Comme avant, $\mathcal{S}'_i$ est une algèbre affinoïde, et le morphisme naturel $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'_i$ est continu, ce qui permet d'étendre la pseudo-représentation T en une pseudo-représentation continue $T'_i : G_{\mathbb{Q},S} \longrightarrow \mathcal{S}'_i$. On a aussi que le morphisme λ' s'étend à un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathcal{S}'_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ par continuité. Comme plus haut, on a un polynôme $P'_i \in (\mathcal{S}'_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} E'')[X]$ qui interpole les polynômes de Sen associés aux morphismes de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathcal{S}'_i \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. Par cette discussion, on est réduit à montrer que P et P'_i sont égaux dans $(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}}[X]$, où $(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}}$ est le quotient de $\mathcal{S}'_i$ par son nilradical (autrement dit, P et P_i coïncident modulo n'importe quel idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{S}'_i$). Ici, par abus de notation, on dénote encore par P son image dans $(\mathcal{S}'_i \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)[X]$. Or, pour tout $\lambda : (\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ associé à un idéal maximal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}} \backslash V(x_i)$, c'est certainement le cas. Comme $(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}}$ est réduit et de Jacobson, le résultat reste vrai pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ dans une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}}$ qui intersecte $\mathrm{Spm}(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}} \backslash V(x_i)$. Il existe une composante irréductible qui n'intersecte pas cet ouvert si et seulement si x_i est contenu dans un idéal premier minimal de $\mathrm{Spec}(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}}$, ce qui implique que x_i est un diviseur de 0 de $(\mathcal{S}'_i)^{\mathrm{red}}$ (ou de $\mathcal{S}'_i$). Soit $m \geq 0$ suffisamment grand pour qu'on ait $p^m x_i \in \mathcal{S}'^{+}_i$ et $p^m x_i \in \mathcal{S}^+$. Notons que comme $\mathcal{S}^+[x_1/x_i, \ldots, x_r/x_i]$ est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre intègre, $p^m x_i$ n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathcal{S}^+[x_1/x_i, \ldots, x_r/x_i]$. Cela implique qu'il ne l'est pas non plus dans $\mathcal{S}'^{+}_i$, car toute complétion I-adique d'un anneau noethérien est plate [Sta25, 06LE]. Ainsi, x_i n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathcal{S}'_i$, en on a le résultat voulu.

□

4.3 Calcul des poids de Hodge-Tate-Sen

On peut maintenant conclure la preuve. Notons que par notre convention pour l'ordre des sections habituelles de $\mathcal{O}(1)$ (qui n'est pas le même que celui fait dans [Pan25], cf. remarque 2.5.5), $V_{K^pK_p,1} \in \mathcal{V}_{K^pK_p}$ pour tout niveau K^pK_p. Par la proposition 4.1.2 et le théorème 4.2.1, pour toute représentation provenant d'une forme propre f dans l'image $M_1 \subseteq M_k^\dagger(K^p)$ de

$$\operatorname*{colim}_{K_p \to 1} H^0(V_{K^pK_p,1}, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k}),$$

l'un des poids de Hodge-Tate-Sen est 0, et donc, par la remarque 2.8.10, l'autre est $k - 1$. Pour obtenir le théorème 1.0.3, on montre que toutes les représentations associées à des formes propres surconvergentes peuvent être obtenues de cette façon. Étant donné que l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ et l'action de $\mathbb{T}_S$ commutent, cette dernière assertion suit directement du lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *On a*

$$M_k^\dagger(K^p) = \bigcup_{n \geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix} M_1.$$

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{V}_{K^pK_p}$ pour K_p suffisamment petit, et écrivons $\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(V_\infty) = \pi_{K^pK_p}^{-1}(V)$. Soit $V_1 \subseteq (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}}$ l'ouvert donné par $|x_2/x_1| \leq 1$, de sorte que $\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(V_1) = \pi_{K^pK_p}^{-1}(V_{K^pK_p,1})$ dans $\mathcal{X}^*_{K^p,\mathbb{C}_p}$. Par définition de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p})^{\mathrm{ad}}$, il existe un élément

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^n \end{pmatrix}$$

avec $n \geq 0$ tel que $g^{-1}(V_1) \subseteq V_\infty$. Aussi, pour K'_p suffisamment petit, on a $gK'_pg^{-1} \subseteq K_p$. On a alors $[g]^{-1}(V_{K^pK'_p,1}) \subseteq [\mathrm{id}]^{-1}(V)$ dans $\mathcal{X}^*_{K^pgK'_pg^{-1},\mathbb{C}_p}$. Par définition de l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$, il suit que l'image de

$$H^0(V, \omega_{K^pK_p}^{\otimes k}) \longrightarrow M_k^\dagger(K^p)$$

est dans gM_1. Comme V était arbitraire, cela donne le résultat voulu.

□

Remarque 4.3.2. Cet argument montre que toute représentation dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ associée à une forme propre surconvergente se factorise par une représentation sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. En effet, par la démonstration du lemme 4.2.2 et le lemme 4.3.1, toute telle représentation est obtenue, à isomorphisme près, en composant une représentation sur une algèbre affinoïde $\mathcal{S}$ sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et un morphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$, et tout tel morphisme se factorise par une extension finie.

Bibliographie

[Bar76] Wolfgang Bartenwerfer, *Der erste Riemannsche Hebbarkeitssatz im nichtarchimedischen Fall*, J. Reine Angew. Math. **286/287** (1976), 144–163 (German).

[BGR84] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer, and Reinhold Remmert, *Non-archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 261, Springer, Cham, 1984.

[Box15] George Boxer, *Torsion in the Coherent Cohomology of Shimura Varieties and Galois Representations*, Preprint, arXiv :1507.05922 [math.NT], 2015.

[Che14] Gaëtan Chenevier, *The p-adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group and pseudorepresentations over arbitrary rings*, Automorphic forms and Galois representations. Proceedings of the 94th London Mathematical Society (LMS) – EPSRC Durham symposium, Durham, UK, July 18–28, 2011. Volume 1, Cambridge : Cambridge University Press, 2014, pp. 221–285.

[DS05] Fred Diamond and Jerry Shurman, *A first course in modular forms*, Grad. Texts Math., vol. 228, Berlin : Springer, 2005.

[Fal87] Gerd Faltings, *Hodge-tate structures and modular forms*, Math. Ann. **278** (1987), 133–149.

[Gro98] Benedict H. Gross, *On the Satake isomorphism*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry. Proceedings of the symposium, Durham, UK, July 9–18, 1996, Cambridge : Cambridge University Press, 1998, pp. 223–237.

[Hid89] Haruzo Hida, *Nearly ordinary Hecke algebras and Galois representations of several variables*, Algebraic analysis, geometry, and number theory : proceedings of the JAMI inaugural conference, held at Baltimore, MD, USA, May 16-19, 1988, Baltimore : Johns Hopkins University Press, 1989, pp. 115–134 (English).

[Hid12] ______, *Geometric modular forms and elliptic curves*, 2nd ed. ed., Singapore : World Scientific, 2012.

[Lan02] Serge Lang, *Algebra.*, 3rd revised ed. ed., Grad. Texts Math., vol. 211, New York, NY : Springer, 2002.

[Lan13] Kai-Wen Lan, *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, Lond. Math. Soc. Monogr. Ser., vol. 36, Princeton, NJ : Princeton University Press, 2013.

[Mat70] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, Math. Lect. Note Ser., The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, MA, 1970.

[Pan22] Lue Pan, *On locally analytic vectors of the completed cohomology of modular curves*, Forum Math. Pi **10** (2022), 82, Id/No e7.

[Pan25] ———, *A note on some p-adic analytic hecke actions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **27** (2025), no. 8, 3297–3311.

[Rob63] Norbert Roby, *Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules*, Ann. Sci. éc. Norm. Supér. (3) **80** (1963), 213–348 (French).

[Sch15] Peter Scholze, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, Ann. Math. (2) **182** (2015), no. 3, 945–1066.

[Sen80] Shankar Sen, *Continuous cohomology and p-adic Galois representations*, Invent. Math. **62** (1980), 89–116.

[Sen88] ———, *The analytic variation of p-adic Hodge structure*, Ann. Math. (2) **127** (1988), no. 3, 647–661.

[Sen93] ———, *An infinite dimensional Hodge-Tate theory*, Bull. Soc. Math. Fr. **121** (1993), no. 1, 13–34.

[Sta25] The Stacks project authors, *The stacks project*, `https://stacks.math.columbia.edu`, 2025.

[SW13] Peter Scholze and Jared Weinstein, *Moduli of p-divisible groups*, Camb. J. Math. **1** (2013), no. 2, 145–237.

[Tay91] Richard Taylor, *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 281–332.

[Wil88] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 529–573.